

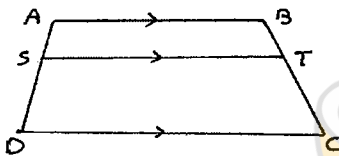


۱- نقاط $A(3, 2)$ و $B(-3, 5)$ و $C(-2, -1)$ سه رأس یک مثلث هستند، طول ارتفاع وارد بر ضلع AB را بیابید.

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha}$ و $\beta^2 + \frac{1}{\beta}$ باشند.

۳- در دوزنقه‌ی مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است،

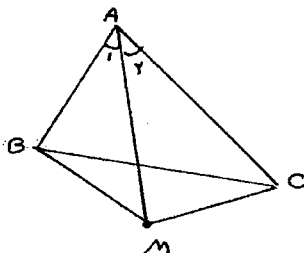
$$\text{ثابت کنید: } \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$



۴- در مثلث ABC روی نیمساز زاویه \hat{A} نقطه M طوری قرار دارد که

$$AM^2 = AB \cdot AC$$

رابطه‌ی $AM^2 = AB \cdot AC$ برقرار است، ثابت کنید دو مثلث AMB و AMC متشابه هستند.



به حروف:

نمره تجدید نظر (به عدد):

به حروف:

نمره ورقه (به عدد):

تاریخ / امضاء:

نام و نام خانوادگی دبیر:

تاریخ / امضاء:

نام و نام خانوادگی دبیر:

۵- نمودار تابع $y = 2x - \left[\frac{x}{2}\right]$ را در $x \in [-1, 3]$ رسم کنید.

۱/۵

۶- معکوس پذیری تابع $f(x) = x^2 - 2x + 5$ را بررسی و در صورت معکوس پذیری، ضابطه‌ی معکوس را بیابید.

۷- اگر $-\frac{\pi}{24} < x < \frac{\pi}{24}$ و $\sin 4x = \frac{3m-1}{5}$ باشد، حدود m را بیابید.

۸- اگر $\tan 25^\circ = 0/6$ باشد، حاصل $\frac{\sin 155^\circ - \sin 295^\circ}{\cos 205^\circ - \cos 475^\circ}$ را بیابید.



limoonad
Education For All

۹- نمودار تابع $y = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ را رسم کنید.

۱۰- نمودار تابع زیر را به کمک تابع معکوس آن رسم کنید.

$$y = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 1$$

۱۱- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشد، حاصل عبارات زیر را بر حسب a ، b و c بیابید.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{125}}} \frac{24}{\sqrt[5]{98}}$$

۱۲- اگر $2 + \log_x 8 = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_x(x^2 - 1)$ باشد، حاصل $\log_{x^2} \sqrt[4]{27}$ را بدست آورید.

۱۳- حاصل حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3}$$

۱۴- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|} & x < 1 \\ 2a + 3 & x = 1 \\ a[-2x] + b & x > 1 \end{cases}$$

۱۵- احتمال قبولی علی در امتحان $0/6$ و احتمال قبولی رضا در امتحان $0/7$ است. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) حداقل یکی از این دو نفر در امتحان قبول شود.

ب) فقط رضا در امتحان قبول شود.

۱۶- احتمال انتخاب علی در تیم فوتبال برابر $0/23$ و احتمال انتخاب در تیم والیبال $0/24$ است. اگر در تیم فوتبال انتخاب شود، احتمال انتخاب شدن در تیم والیبال $0/4$ است. با کدام احتمال حداقل در یکی از این دو تیم انتخاب شود؟

۱۷- انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌های ۷ و ۵ و ۶ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۴ را بیابید.



limoonad
Education For All

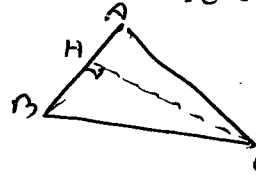


۱- نقاط $A(3, 2)$ و $B(-3, 5)$ و $C(-2, -1)$ سه رأس یک مثلث هستند، طول ارتفاع وارد بر ضلع AB را بیابید.

$$m_{AB} = \frac{-3-3}{5-2} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$y-2 = -2(x-3) \rightarrow y-2 = -2x+6$$

$$2x+y-8=0$$



$$CH = \frac{|-2(-2) - 1 - 8|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

فاصله نقطه C از ضلع AB

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \cdot \beta$ باشد.

$$S = \alpha + \beta = 5$$

$$P = \alpha \cdot \beta = 1$$

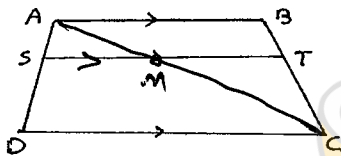
$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 25 - 2 = 23$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta = 23 + 5 = 28$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta) = 23 \cdot 5 = 115$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 115$$

۳- در دوزنقه‌ی مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است،



ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$

خطوط AC را رسم می‌کنیم

$$\triangle ACD : SM \parallel CD \rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{AM}{MC}$$

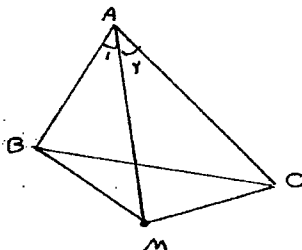
$$\triangle ABC : TM \parallel AB \rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{AM}{MC}$$

$$\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

۴- در مثلث ABC روی نیمساز زاویه \hat{A} نقطه M طوری قرار دارد که

رابطه‌ی $AM^2 = AB \cdot AC$ برقرار است، ثابت کنید دو مثلث

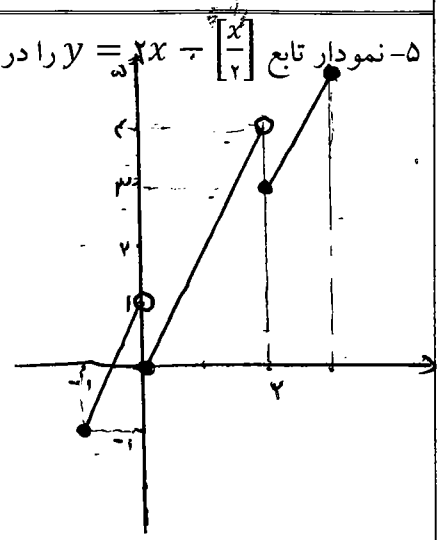
AMB و AMC متشابه هستند.



$$AM^2 = AB \cdot AC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow \triangle ABM \sim \triangle AMC$$

۵- نمودار تابع $y = 2x - \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ را در $x \in [-1, 3]$ رسم کنید.



$x \in [-1, 3] \rightarrow x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

$x \in [-\frac{1}{2}, 0) \rightarrow \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = -1 \rightarrow y = 2x + 1$

$x \in [0, 1) \rightarrow \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0 \rightarrow y = 2x$

$x \in [1, \frac{3}{2}] \rightarrow \lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 1 \rightarrow y = 2x - 1$

۶- معکوس پذیری تابع $f(x) = x^2 - 2x + 5$ را بررسی و در صورت معکوس پذیری، ضابطه‌ی معکوس را بیابید.

$y = x^2 - 2x + 5 \rightarrow y = (x-1)^2 + 4$

$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow (x_1-1)^2 + 4 = (x_2-1)^2 + 4 \rightarrow |x_1-1| = |x_2-1|$

$x \leq 1 \rightarrow -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \rightarrow x_1 = x_2$

$y = (x-1)^2 + 4 \rightarrow (x-1)^2 = y-4 \rightarrow |x-1| = \sqrt{y-4} \rightarrow x \leq 1$

$1-x = \sqrt{y-4} \rightarrow x = 1 - \sqrt{y-4} \rightarrow f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-4}$

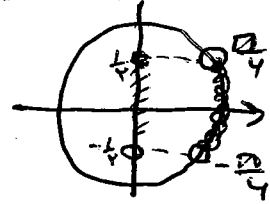
۷- اگر $-\frac{\pi}{24} < x < \frac{\pi}{24}$ و $\sin mx = \frac{m-1}{5}$ باشد، حدود m را بیابید.

$-\frac{\pi}{4} < mx < \frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{2} < \sin mx < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{5} < \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{5}{2} < m-1 < \frac{5}{2}$

$-\frac{3}{2} < m < \frac{7}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{5}{2} \rightarrow 29.5^\circ$



۸- اگر $\tan 25^\circ = 0.466$ باشد، حاصل $\frac{\sin 155^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 205^\circ - \cos 45^\circ}$ را بیابید.

$\frac{\sin(180^\circ - 25^\circ) - \sin(270^\circ + 25^\circ)}{\cos(180^\circ + 25^\circ) - \cos(90^\circ + 25^\circ)}$

$\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{-\cos 25^\circ + \sin 25^\circ}$

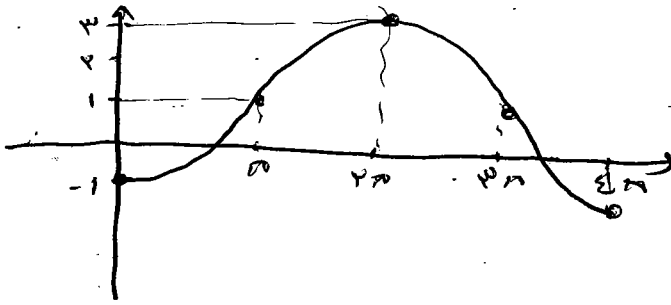
$\frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{-\cos 25^\circ + \sin 25^\circ} \div \cos 25^\circ = \frac{\tan 25^\circ + 1}{-1 + \tan 25^\circ}$

$\frac{1.4}{-1.4} = -1$

۹- نمودار تابع $y = -2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ را رسم کنید:

$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi$

x	0	π	2π	3π	4π
y	-1	1	3	1	-1



۱۰- نمودار تابع زیر را به کمک تابع معکوس آن رسم کنید.

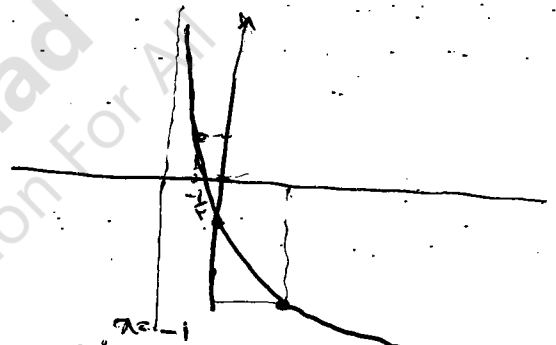
$y = 2 \log_2(x+1) - 1$

$$\frac{y+1}{2} = \log_2(x+1) \rightarrow x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{y+1}{2}} \rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{y+1}{2}} - 1$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{2}} - 1$$

x	$-\infty$	-3	-1	0	$+\infty$
y	$+\infty$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$

تقریباً



۱۱- اگر $\log_2 = a$ و $\log_3 = b$ و $\log_5 = c$ باشد، حاصل عبارات زیر را بر حسب a ، b و c بیابید.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{125}}} \frac{24}{\sqrt{98}} = \frac{\log 24 - \frac{1}{2} \log 98}{\log (125)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\log 2^3 + 3 \log 3 - \frac{1}{2} (\log 2 + 2 \log 7)}{-\frac{3}{2} \log 5}$$

$$\frac{\log 2^3 + 3 \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log 7}{-\frac{3}{2} (1 - \log 2)} = \frac{\log 2^3 + \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 7}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \log 2}$$

$$\frac{b + \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} c}{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} a}$$

۱۲- اگر $\log_x 8 = 2 + \log_x(x^2 - 1)$ و $\log_{\sqrt{x}} 3 = \log_x(x^2 - 1)$ حاصل $\log_{x^2} \sqrt{27}$ را بدست آورید.

$$\log_x 8 + \log_x(x^2 - 1) - \log_x 1 = 2 \rightarrow \log_x \frac{8x^2 - 8}{x} = 2 \rightarrow$$

$$\frac{8x^2 - 8}{x} = x^2 \rightarrow 8x^2 - 8x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$\log_{x^2} \sqrt{27} = \log_{x^2} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \log_x 3 \rightarrow \frac{3}{2}$$

۱۳- حاصل حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 2x^2} \cdot \frac{x-1}{2x^2 + 2x - 1}$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + 2x^2} \cdot \frac{x-1}{2x^2 + 2x}$$

$$\frac{-x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(2x + 1)} = \frac{2}{3} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+1} - 3} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x+1} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-4)(\sqrt{x+1} + 3)}{(x-4)(\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x} + 4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۴- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x-1|} & x < 1 \\ 2a + 3 & x = 1 \\ a[-2x] + b & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = f(1)$$

$$2 = -2a + b = 2a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{-(x-1)} = 2$$

$$\begin{cases} 2a + 3 = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ -2a + b = 2 \rightarrow b = \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + b = 2 \rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} a[-2x] + b = a[-2(1+\epsilon)] + b = a[-2-2\epsilon] + b = a[(-2)^-] + b = -2a + b$$

$$f(1) = 2a + 3$$

۱۵- احتمال قبولی علی در امتحان ۰/۶ و احتمال قبولی رضا در امتحان ۰/۷ است. مطلوب است احتمال آنکه:

الف) $P(A) = 0.6$
ب) $P(B) = 0.7$

الف) حداقل یکی از این دو نفر در امتحان قبول شود.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$0.6 + 0.7 - 0.42 = 1.3 - 0.42 = 0.88$$

ب) فقط رضا در امتحان قبول شود.

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.7 - 0.42 = 0.28$$



۱۶- احتمال انتخاب علی در تیم فوتبال برابر ۰/۲۳ و احتمال انتخاب در تیم والیبال ۰/۲۴ است. اگر در تیم فوتبال انتخاب شود، احتمال انتخاب شدن در تیم والیبال ۰/۴ است. با کدام احتمال حداقل در یکی از این دو تیم انتخاب شود؟

$$P(\overbrace{\text{فوتبال}}^A) = 0.23$$

$$P(\text{والیبال}) = 0.24$$

$$P(\underbrace{\text{فوتبال}}_A | \underbrace{\text{والیبال}}_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.23} \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0.092$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.23 + 0.24 - 0.092 = 0.378$$

۱۷- انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌های ۷ و ۵ و ۶ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۴ را بیابید.

$$\bar{x} = \frac{4+10+9+8+7+5+2}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

$$s^2 = \frac{(7-7)^2 + (10-7)^2 + (9-7)^2 + (8-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (2-7)^2}{7}$$

$$s^2 = \frac{49}{7} = 7$$

$$\rightarrow \boxed{s = 2.6457} \quad \text{انحراف معیار}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2.6457}{7} = 0.378$$

