



۱- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

۲- تابع وارون تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ را در صورت وجود بیابید.۳- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2m+1, m-1)$ از خط $3x - 4y + 2 = 0$ برابر ۶ باشد، m را بیابید.

۴- معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2x+1} = 2 + \sqrt{x-3}$$

۵- در یک دنباله‌ی حسابی $a_{15} = 34$ و $S_8 = 20$ است، حاصل S_5 را بیابید.

۶- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ را به دست آورید.

۸- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

الف

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

۹- ابتدا نمودار تابع $f(x) = |4x - x^2|$ را رسم کنید، سپس به روش هندسی معادله $f(x) = 5$ را حل کنید.



پاسخنامه تشریحی

- ۱

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0 \xrightarrow{\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) = k} k^2 - 11k + 10 = 0$$

$$\rightarrow (k-1)(k-10) = 0 \rightarrow \begin{cases} k=1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ k=10 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 10 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 12 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

- ۲

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow \cancel{2x_1x_2} - 6x_1 + x_2 - \cancel{3} = \cancel{2x_1x_2} - 6x_2 + x_1 - \cancel{3} \Rightarrow 7x_2 = 7x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

$$y = \frac{2x + 1}{x - 3} \Rightarrow 2x + 1 = xy - 3y \Rightarrow 1 + 3y = xy - 2x$$

$$\Rightarrow x(y - 2) = 3y + 1 \rightarrow x = \frac{3y + 1}{y - 2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$$

- ۳

یادآوری: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{|3(2m + 1) - 4(m - 1) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 6 \Rightarrow |6m + 3 - 4m + 4 + 2| = 30$$

$$\Rightarrow |2m + 9| = 30 \rightarrow 2m + 9 = \pm 30 \rightarrow m = \frac{21}{2}, m = -\frac{39}{2}$$

- ۴

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$2x + 1 = 4 + 4\sqrt{x - 3} + x - 3$$

$$x = 4\sqrt{x - 3} \rightarrow x^2 = 16x - 48 \rightarrow x^2 - 16x + 48 = 0$$

$$(x - 4)(x - 12) = 0 \rightarrow x = 4, x = 12$$

$$x = 12 \rightarrow \sqrt{25} = 2 + \sqrt{9} \rightarrow 5 = 2 + 3 \text{ قابل قبول}$$

$$x = 4 \rightarrow \sqrt{9} = 2 + \sqrt{1} \rightarrow 3 = 2 + 1 \text{ قابل قبول}$$

معادله ۲ ریشه دارد.

- ۵

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7d) = 20 \rightarrow 2a_1 + 7d = 5$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 34 \quad \begin{cases} a_1 + 14d = 34 \\ -2 \times (2a_1 + 7d = 5) \Rightarrow -3a_1 = 24 \Rightarrow a_1 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = 3 \rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(2a_1 + 49d) = 25(-16 + 147) = 3275$$

- ۶



$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y} \xrightarrow{\times y(y+5)} (3y+5) + y(y+4) = (y+1)(y+5)$$

$$\Rightarrow 3y+5+y^2+4y=y^2+6y+5 \Rightarrow y=0$$

چون $y=0$ و $y=-5$ مخرج را صفر می کنند پس y به دست آمده قابل قبول نمی باشد و معادله جواب ندارد.

- ۷

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} = \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)}{\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1} \rightarrow \frac{16 + 4 + 4}{-2 + 4 + 1} = \frac{24}{3} = 8$$

- ۸

الف

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

$$\frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Rightarrow x < -2 \cup x \geq 2$$

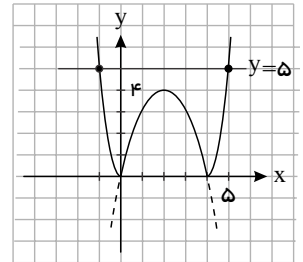
	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$		-	-	+
$x+2$		-	+	+
$\frac{x-2}{x+2}$		+	-	+

۹ - ابتدا $y = 4x - x^2$ را رسم می کنیم، سپس جاهایی که نمودار زیر محور x ها است را آینه وار معکوس می کنیم.

$$y = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) \Rightarrow y = -(x-2)^2 + 4 \quad \text{رأس سهمی} = \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$$

نقاط برخورد سهمی با محور x ها را نیز به دست می آوریم:

$$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x=0, x=4$$



با داشتن این نقطه سهمی را رسم می کنیم. با توجه به رسم نمودار دو تابع، $x=5$ و $x=-1$ طول های نقاط تلاقی دو نمودار و در نتیجه جواب های معادله $|4x - x^2| = 5$ هستند.

