



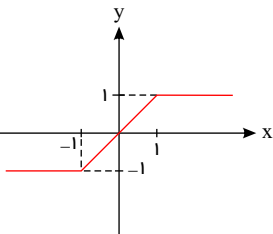
۱ ثابت کنید اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد آن گاه n فرد است. ۱

۲ در هر حالت ارزش گزاره‌های p و q را تعیین کنید (درست $\equiv T$ و نادرست $\equiv F$)
الف $\sim(\sim p \vee \sim q) \equiv T$ ب $(\sim p \vee q) \equiv F$ ۱.۵

۳ با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.
الف $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ (تبدیل ترکیب شرطی به ترکیب فصلی)
ب $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (گزاره عکس نقیض گزاره شرطی) ۲

۴ اگر $(p \wedge q)$ درست باشد، ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
الف $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ ب $\sim q \Rightarrow (p \wedge r)$ پ $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$ ۱.۵

۵ مقادیر a, b, c را طوری تعیین کنید که ضابطه $f(x) = (a-b)x^2 + cx + 3 - b$ یک تابع همانی باشد. ۱



۶ ضابطه تابع زیر را مشخص کنید. ۱.۵

۷ اگر تابع $f(x) = k$ تابعی ثابت باشد و $f(a) + f(b) = f(c)^2$ مقدار k را به دست آورید. ۱.۵

۸ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x-1| + 2$ را رسم کنید. ۱.۵

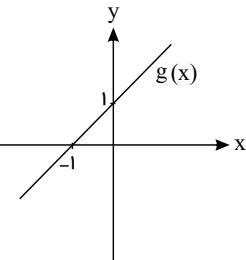
۹ نمودار مختصاتی تابع $f(x) = [x+1]$ را به ازای $-2 \leq x \leq 1$ رسم کنید. ۱.۵

۱۰ با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $f+g$ را به ازای $0 \leq x \leq 2$ مشخص کنید.

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = [x]$$

۱۱ اگر $f(x) = x^2 - 1$ باشد و شکل تابع $g(x)$ به صورت زیر باشد، با توجه به دو تابع f و g ضابطه تابع $(f \times g)(x)$ را مشخص کنید.



۱۲ اگر $(f+g)(1) = 7$ و $(f-g)(-1) = -4$ باشد در این صورت مقادیر a و b را به دست آورید. ۱.۵

$$f = \{(1, a+1), (-1, a-b), (3, 2)\}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 3), (-1, 5)\}$$



۱۳ با توجه به مقدارهای جزء صحیح، مقادیر x را مشخص کنید.

۷۵

الف) $[3x] = 2$

ب) $[2x - 1] = -3$

۱۴ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۷۵

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{20}] =$$



limoonad
Education For All

پاسخنامه تشریحی

۱

 می‌دانیم: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
 n^2 زوج است: p $\rightarrow \sim n^2$ فرد است: $\sim p$
 n زوج است: q $\rightarrow \sim n$ فرد است: $\sim q$

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

عکس نقیض گزاره شرطی را ثابت می‌کنیم.

 n^2 زوج است $\Rightarrow n$ زوج باشد

 الگوی عدد زوج $n = 2k \rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$

۲

$$\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv T \rightarrow \sim p \vee \sim q \equiv F \quad \text{(الف)}$$

$$\rightarrow \sim (p \wedge q) \equiv F \rightarrow p \wedge q \equiv T \rightarrow p \equiv q \equiv T$$

ترکیب عطفی فقط وقتی ارزش درست دارد؛ که هر دو گزاره درست باشد.

(ب) ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است؛ که هر دو گزاره ساده در آن نادرست باشند. پس:

$$q \equiv F \quad \text{و} \quad \sim p \equiv F \Rightarrow p \equiv T$$

۳

(الف)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	$d \Rightarrow d \equiv d$	$n \vee d \equiv d$
د	ن	ن	$d \Rightarrow n \equiv n$	$n \vee n \equiv n$
ن	د	د	$n \Rightarrow d \equiv d$	$d \vee d \equiv d$
ن	ن	د	$n \Rightarrow n \equiv d$	$d \vee n \equiv d$

هم ارزش

(ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	$n \Rightarrow n \equiv d$
د	ن	ن	د	ن	$d \Rightarrow n \equiv n$
ن	د	د	ن	د	$n \Rightarrow d \equiv d$
ن	ن	د	د	د	$d \Rightarrow d \equiv d$

هم ارزش

 ۴ اگر $d \equiv p \wedge q$ باشد، آن‌گاه هر دو گزاره p و q دارای ارزش درست هستند.

$$p \equiv d, \quad q \equiv d \quad \text{(الف)}$$

$$\sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv d$$

$$n \Leftrightarrow n$$

 (ب) $\sim q \Rightarrow (p \wedge r)$

 (گزاره شرطی به انتقای مقدم درست است.) $d \equiv (p \wedge r) \Rightarrow n$

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim p \quad \text{(پ)}$$

$$(d \vee n) \wedge n$$

$$d \wedge n \equiv n$$

 ۵ ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است.

 با توجه به ضابطه تابع همانی ضریب x^2 یعنی $a - b$ برابر صفر و ضریب x یعنی c برابر ۱ و مقدار ثابت $b - 3$ برابر صفر باشد.

$$3 - b = 0 \Rightarrow b = 3, \quad c = 1, \quad a - b = 0 \xrightarrow{b=3} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

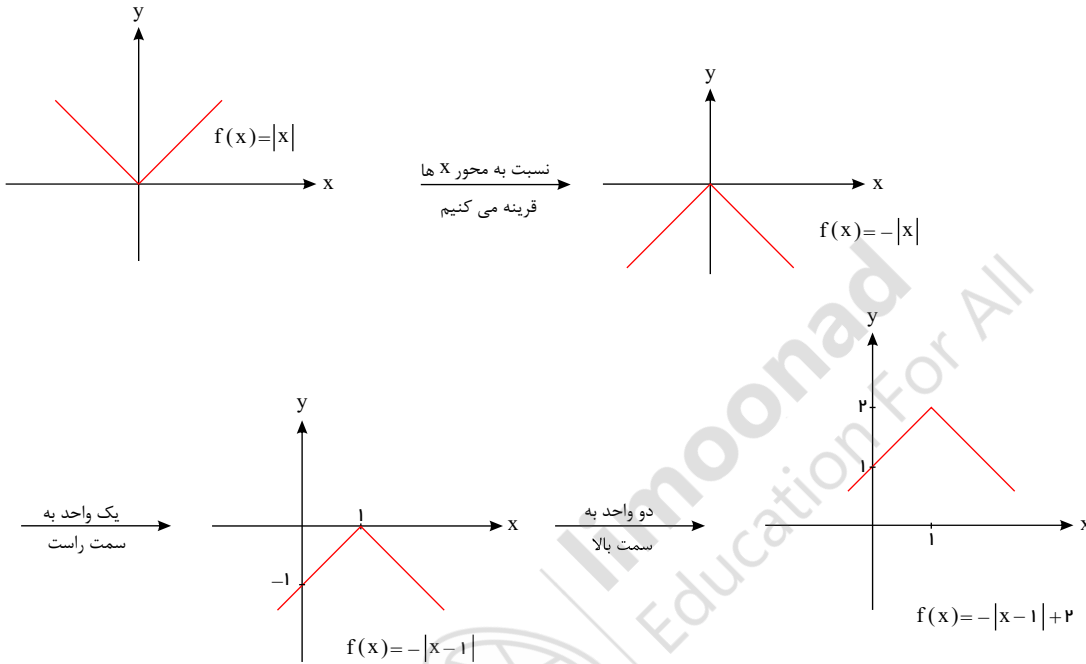
۶ این تابع برای مقادیر $x \geq 1$ تابع ثابت $f(x) = 1$ و برای $-1 < x < 1$ تابع همانی $f(x) = x$ و برای $x \leq -1$ تابع ثابت $f(x) = -1$ است. در نتیجه ضابطه این تابع به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ x & -1 < x < 1 \\ -1 & x \leq -1 \end{cases}$$

۷ تابع ثابت $f(x) = k$ به ازای هر مقدار دلخواه دامنه برابر k است. در نتیجه داریم:

$$f(a) + f(b) = f(c)^2 \Rightarrow k + k = k^2 \Rightarrow 2k = k^2 \Rightarrow k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(k - 2) = 0 \Rightarrow k = 2 \text{ یا } k = 0$$

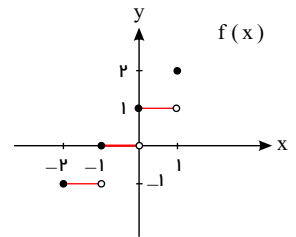
۸ برای رسم نمودار مختصاتی تابع $f(x) = -|x - 1| + 2$ ابتدا نمودار مختصاتی تابع $f(x) = |x|$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم سپس یک واحد به سمت راست و در آخر دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.



۹ با توجه به خواص جزء صحیح داریم $[x + 1] = [x] + 1$. با تقسیم کردن فواصل $-2 \leq x \leq 1$ به قسمت‌های کوچکتر داریم:

$$\begin{aligned} -2 \leq x < -1 &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow [x + 1] = [x] + 1 = -2 + 1 = -1 \\ -1 \leq x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow [x + 1] = [x] + 1 = -1 + 1 = 0 \\ 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow [x + 1] = [x] + 1 = 0 + 1 = 1 \\ x = 1 &\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow [x + 1] = [x] + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < -1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$



۱۰ ابتدا تابع $g(x) = [x]$ را به ازای $0 \leq x \leq 2$ به صورت چند ضابطه‌ای مشخص می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1 &\Rightarrow [x] = 0 \\ 1 \leq x < 2 &\Rightarrow [x] = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow [x] = 2 \end{aligned} \Rightarrow g(x) = [x] = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع $f + g$ را مشخص می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + [x] = x + 1 + \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$



$$= \begin{cases} x+1+0 & 0 \leq x < 1 \\ x+1+1 & 1 \leq x < 2 \\ x+1+2 & x=2 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & 0 \leq x < 1 \\ x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x+3 & x=2 \end{cases}$$

۱۱ تابع $g(x)$ یک تابع خطی است، ضابطه این تابع را مشخص می‌کنیم این تابع از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ می‌گذرد در نتیجه، داریم:

$$\text{شیب} = \frac{1-0}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

و عرض از مبدأ این خط (محل برخورد با محور y ها) برابر ۱ است پس ضابطه تابع $g(x)$ به صورت مقابل است.

$$g(x) = x + 1$$

حال با داشتن ضابطه تابع f و g ضابطه $f \times g$ را مشخص می‌کنیم.

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

۱۲

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = a + 1 + 4 = 7 \Rightarrow a + 5 = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$(f - g)(-1) = f(-1) - g(-1) = a - b - 5 = -4 \xrightarrow{a=2} 2 - b - 5 = -4 \Rightarrow -b - 3 = -4 \Rightarrow b = 1$$

۱۳ (الف)

$$[3x] = 2 \Rightarrow 2 \leq 3x < 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$$

(ب)

$$[2x - 1] = -3 \Rightarrow -3 \leq 2x - 1 < -2$$

$$\Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -\frac{2}{2} \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

۱۴ جذر اعداد ۱ تا ۳ بین ۱ و ۲ است.

$$[\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = [\sqrt{3}] = 1$$

جذر اعداد ۴ تا ۸ بین ۲ و ۳ است.

$$[\sqrt{4}] = [\sqrt{5}] = [\sqrt{6}] = [\sqrt{7}] = [\sqrt{8}] = 2$$

جذر اعداد ۹ تا ۱۵ بین ۳ و ۴ است.

$$[\sqrt{9}] = [\sqrt{10}] = [\sqrt{11}] = [\sqrt{12}] = [\sqrt{13}] = [\sqrt{14}] = [\sqrt{15}] = 3$$

جذر اعداد ۱۶ تا ۲۰ بین ۴ و ۵ است.

$$[\sqrt{16}] = [\sqrt{17}] = [\sqrt{18}] = [\sqrt{19}] = [\sqrt{20}] = 4$$

پس در آخر

$$3 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 + 5 \times 4 = 3 + 10 + 21 + 20 = 54$$