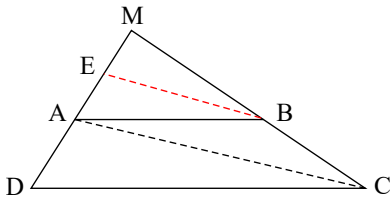




۱) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{10}$

۲) در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، فاصله MD کدام است؟



- ① ۱۲
② ۱۲٫۲۵
③ ۱۲٫۵
④ ۱۲٫۷۵

۳) سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ ، $AC: y - 2x = 5$ ، $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

- ① $6y - 4x = 15$ ② $9y - 6x = 17$ ③ $3y - 2x = 7$ ④ $3y + 2x = 9$

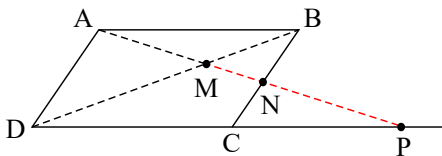
۴) اگر دو تابع $f(x) = \frac{ax^3 + b}{2x^3 - c}$ و $g(x) = 2$ با هم مساوی باشند، $a + b + c$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۰

۵) به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می باشد؟

- ① $-\frac{9}{5}$ ② ۱ ③ $-\frac{9}{5}, 1$ ④ $-1, \frac{9}{5}$

۶) در شکل روبه رو، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل $MP \times MN$ برابر کدام است؟



- ① AB^2 ② AD^2
③ MD^2 ④ MA^2

۷) اگر $[x] = 1$ باشد آن گاه حاصل $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ $2x - 3$

۸) اگر مجموعه جواب نامعادله $1 \leq |x - 2| \leq 2$ بازه $[a, b]$ باشد $a + b$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۹) به ازای کدام مقدار m ، منحنی تابع $y = (m + 2)x^2 + 4x + m - 1$ همواره بالای محور x هاست؟

- ① $m > 2$ ② $m > -2$ ③ $m < -3$ ④ $-3 < m < 2$

۱۰) به ازای کدام مقدار m ، ریشه های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یک دیگرند؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ ۲



۱۱ سه نقطه $A \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix}$ سه رأس یک مثلث هستند. این مثلث همواره چگونه است؟

- ۱ مختلف‌الاضلاع است.
 ۲ متساوی‌الساقین است ولی قائم‌الزاویه نیست.
 ۳ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.
 ۴ قائم‌الزاویه است، ولی متساوی‌الساقین نیست.

۱۲ نمودار تابع $y = x - [x]$; $x \in [-2, 3]$ از n پاره‌خط مساوی به اندازه‌ی l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, l) کدام است؟

- ۱ $(4, 1)$ ۲ $(4, \sqrt{2})$ ۳ $(5, 1)$ ۴ $(5, \sqrt{2})$

۱۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{4x-3} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x}$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

۱۴ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3, 2)$ نسبت به خط $y = x - 3$ کدام است؟

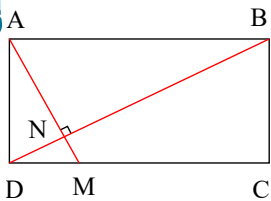
- ۱ $(4, 3)$ ۲ $(5, 0)$ ۳ $(\frac{11}{2}, \frac{7}{2})$ ۴ $(\frac{13}{3}, \frac{9}{4})$

۱۵ در مورد معادله‌ی $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ ، کدام گزینه صحیح است؟

- ۱ فقط یک جواب مثبت دارد.
 ۲ فقط یک جواب منفی دارد.
 ۳ یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.
 ۴ جواب حقیقی ندارد.

۱۶ فاصله‌ی دو خط به معادلات $2x - 3y + a = 0$ و $4x - 6y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ می‌باشد. مجموع مقادیر a کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۲۶ ۴ ۳,۵

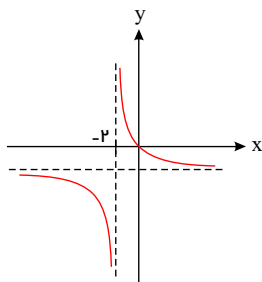


۱۷ در مستطیل $ABCD$ چنانچه $AB = 2BC$ و $AM \perp BD$ ، آن‌گاه نسبت $\frac{AB}{DM}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۳

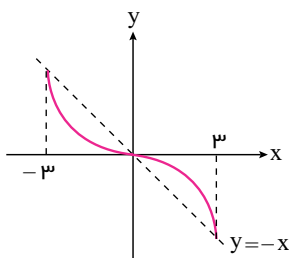
۱۸ دو خط متقاطع در یک صفحه در نظر بگیرید. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که فاصلهٔ آن از هر کدام از این دو خط برابر یک واحد می‌باشد؟

- ۱ یک نقطه ۲ دو نقطه ۳ سه نقطه ۴ چهار نقطه



۱۹ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{3}{2}$ ۴ $-\frac{1}{3}$



۲۰ اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{f(-x) - x}$ کدام است؟

- ۱ $[0, 3]$ ۲ $[-3, 0] \cup \{3\}$ ۳ $[-3, 3]$ ۴ \mathbb{R}



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

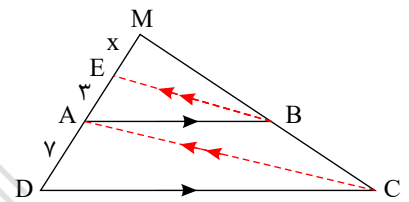
$$x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها: } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6 \\ \text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = A \rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} \rightarrow A^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} + \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{6^2 - 2(4)(6)}{16} + \frac{2}{2} = \frac{144}{16} + 1 = 9 + 1 \rightarrow A^2 = 10 \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{10}$$

۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

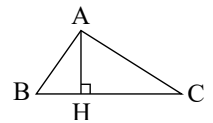
$$\begin{cases} \triangle MAC : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MD C : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$



$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{y} \Rightarrow 7x = 3x + 9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2,25$$

در نتیجه: $MD = 2,25 + 3 + 7 = 12,25$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳



$$BC : 2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلافی دهیم.

حال، معادله‌ی ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می‌نویسیم.

$$A \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{14}{3} \\ \times 3 \rightarrow 9y - 3 = 6x + 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

۴ باید دامنه‌ی دو تابع یکسان باشد یعنی $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ پس باید مخرج تابع f به ازای $x = -1$ صفر شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$2x^x - c = 0 \xrightarrow{x=-1} -2 - c = 0 \Rightarrow c = -2$$

باید ضابطه‌ی دو تابع به ازای هر x از دامنه‌ی تابع یکسان باشد.

$$f(x) = g(x) = 2 \Rightarrow \frac{ax^x + b}{2x^x + 2} = 2 \Rightarrow ax^x + b = 4x^x + 4 \Rightarrow a = 4, b = 4$$

$$\text{پس: } a + b + c = 4 + 4 - 2 = 6$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\text{فرض مسأله: } x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

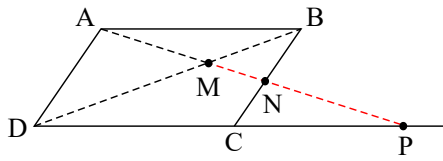
$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$



$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \\ m = -\frac{9}{5} \rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

1 2 3 4 6

از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می کنیم.



$$\left. \begin{aligned} BN \parallel AD &\rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP &\rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN \times MP$$

1 2 3 4 7 اگر $[x] = 1$ باشد آن گاه $1 \leq x < 2$ است.

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = \underbrace{|x-1|}_{+} + \underbrace{|x-2|}_{-} = x-1 + 2-x = 1$$

1 2 3 4 8

اگر $k > 0$ باشد، آن گاه $-k \leq f(x) \leq k$ است و جواب جزء صحیح همواره عددی صحیح است.

$$|[x] - 2| \leq 1 \rightarrow -1 \leq [x] - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq [x] \leq 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} [x] = 1 \rightarrow 1 \leq x < 2 \\ \text{یا} \\ [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3 \xrightarrow{\text{اجتماع}} 1 \leq x < 4 \rightarrow x \in [1, 4) \rightarrow a = 1, b = 4 \rightarrow a + b = 5 \\ \text{یا} \\ [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

1 2 3 4 9 همواره مثبت است و می دانیم شرط مثبت بودن یک عبارت درجه ی دوم آن است که $\Delta < 0$ ، $a > 0$ باشد.

$$I: a > 0 \rightarrow m + 2 > 0 \rightarrow m > -2$$

$$II: \Delta < 0 \rightarrow 16 - 4(m+2)(m-1) < 0 \rightarrow 16 - 4m^2 + 4m - 8m + 8 < 0$$

$$\rightarrow 4m^2 + 4m - 24 > 0 \rightarrow m^2 + m - 6 > 0 \rightarrow (m+3)(m-2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -3, m > 2$$

از اشتراک I, II به جواب $m > 2$ می رسمیم.

1 2 3 4 10 معادله را به صورت $m^2 + 3x + mx^2 - 2 = 0$ مرتب می کنیم.

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x' x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

$$m = 2 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ قابل قبول}$$

1 2 3 4 11 کافی است طول سه ضلع مثلث را حساب کنیم.

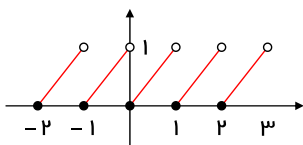
$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ AC &= \sqrt{(0-2)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ BC &= \sqrt{(3-2)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مثلث متساوی الساقین است.}$$

برای این که مشخص کنیم این مثلث، قائم الزاویه است یا خیر باید رابطه فیثاغورث را چک کنیم.

$$(\sqrt{26})^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 \rightarrow 26 = 13 + 13 \rightarrow 26 = 26 \rightarrow \text{مثلث قائم الزاویه است.}$$

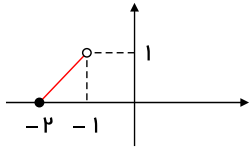
1 2 3 4 12

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله ی $(-2, 3)$ ، پاره خط به اندازه ی $\sqrt{2}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره ای معروف هستند.

توجه:



طول پاره خط = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

1 2 3 4 13

$\sqrt{4x-3} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{2-x}$ توان ۲ $\rightarrow 4x-3+3x+1-2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1}) = 2-x$

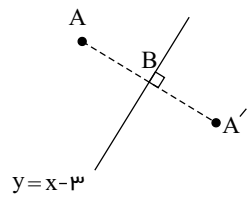
$\rightarrow 7x-2+x-2 = 2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1}) \rightarrow 8x-4 = 2(\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1})$

$\rightarrow 4x-2 = (\sqrt{4x-3})(\sqrt{3x+1})$ توان ۲ $\rightarrow 16x^2 - 16x + 4 = 12x^2 + 4x - 9x - 3$

$\rightarrow 4x^2 - 11x + 7 = 0$ معادله $a+b+c=0$ $\rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1-2=1 \text{ امکان ندارد.} \\ x=\frac{c}{a}=1 = \frac{7}{4} \rightarrow 2-\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ امکان ندارد.} \end{cases}$

بنابراین معادله ریشه ندارد.

1 2 3 4 14



معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(3, 2)$ می‌گذرد و بر خط $y = x - 3$ عمود است را می‌نویسیم، دو خط عمود بر هم شیب‌های قرینه و معکوس هم دارند پس:

$m' = 1 \rightarrow m = -1$

$y - 2 = -1(x - 3) \Rightarrow y - 2 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 5$

برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی B ، محل برخورد دو خط را به‌دست می‌آوریم (حل دستگاه):

$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow x - 3 = -x + 5 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow B(4, 1)$

نقطه‌ی B وسط A و A' قرار دارد، مختصات وسط پاره خط با رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

وسط پاره خط $B \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 5 \\ 1 = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(5, 0)$

1 2 3 4 15

$\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2} \rightarrow \frac{2x+3}{2(x-1)} - \frac{5}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x-3}{2(x+1)}$
 $\xrightarrow{\times 2(x+1)(x-1)} (2x+3)(x+1) - 10 = (2x-3)(x-1)$
 $\rightarrow 2x^2 + 2x + 3x + 3 - 10 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$

این جواب غیر قابل قبول است چون مخرج را صفر می‌کند (در دامنه‌ی تعریف قرار ندارد) یعنی معادله جواب حقیقی ندارد.

1 2 3 4 16

$4x - 6y + 3 = 0 \rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \sqrt{13} = \frac{|3 - 2a|}{\sqrt{16 + 36}}$

$\rightarrow \sqrt{13} = \frac{|3 - 2a|}{2\sqrt{13}} \rightarrow |3 - 2a| = 26$

$3 - 2a = 26 \rightarrow 2a = -23 \rightarrow a = -11,5$, $3 - 2a = -26 \rightarrow 2a = 29 \rightarrow a = 14,5$

بنابراین مجموع مقادیر a برابر ۳ است.

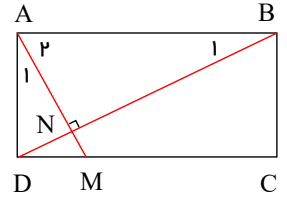


توجه کنید برای محاسبه‌ی فاصله‌ی بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه‌ی $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می‌کنیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

زاویه‌های A_1 و B_1 هر دو متمم A_1 هستند. پس داریم:

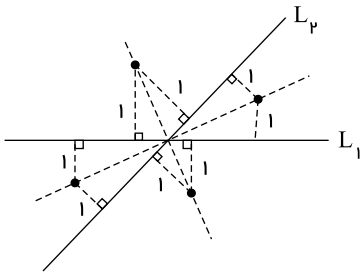
$$\begin{cases} \angle A = \angle D = 90^\circ \\ \angle A_1 = \angle B_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{DM}{AD} \xrightarrow{AB=2AD} \frac{DA}{2DA} = \frac{DM}{\frac{1}{2}AB} \Rightarrow AB = 4DM \Rightarrow \frac{AB}{DM} = \frac{4}{1}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

نقاط، روی نیمسازهای دو خط متقاطع می‌باشد و روی هر نیمساز دو نقطه وجود دارد که از دو خط به فاصله‌ی واحد می‌باشد. پس در کل در صفحه چهار نقطه وجود دارد.



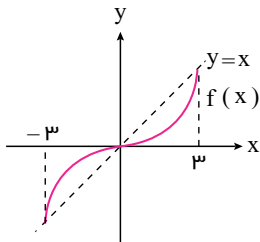
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$f(x) = \frac{x+a}{bx-2} \xrightarrow{f(0)=0} 0 = \frac{0+a}{b(0)-2} \Rightarrow \boxed{a=0} \quad (1)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \text{ریشه‌ی مخرج است. } x = -2 \rightarrow b(-2) - 2 = 0 \rightarrow \boxed{b = -1} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} f(x) = \frac{x}{-x-2} \rightarrow f(1) = \frac{1}{-1-2} \rightarrow f(1) = -\frac{1}{3}$$

راهنمایی: ابتدا نمودارهای $y = x$ و $f(-x)$ را در یک دستگاه رسم کنید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰



اول: طبق راهنمایی نمودارهای $y = x$ و $f(-x)$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. برای رسم تابع $f(-x)$ از روی $f(x)$ کفایت نمودار تابع را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.
دوم: محاسبه‌ی دامنه:

$$f(-x) - x \geq 0 \Rightarrow f(-x) \geq x$$

بنابراین دامنه‌ی تابع مقادیری از x است که $f(-x) \geq x$ باشد. یعنی نمودار تابع $f(-x)$ بالاتر از $y = x$ باشد که این در محدوده $[-3, 0]$ است.

پاسخنامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |



limoonad
Education For All