

نام و نام خانوادگی: .....  
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی  
 نام پدر: .....  
 شماره داوطلب: .....  
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران  
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۳ تهران  
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد سیدخندان  
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تمصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه ۳  
 نام دبیر: آقای زمانی نژاد  
 تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
 ساعت امتحان: ۰۸ : ۰۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۸۰ دقیقه

شماره سؤال	سؤالات	نمره به عدد:		نمره به حروف:	
		نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
۱	ماتریس های $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ به صورت زیر تعریف شده اند، ماتریس $AB$ را بیابید.				
۱,۵	$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ 2i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i + 2j & i > j \\ i - j + 1 & i < j \end{cases}$				
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^y$ را بیابید.				
۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 1 \end{bmatrix}$ و $AB$ ماتریسی قطری باشد، $x$ و $y$ را بیابید.				
۱	ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، در تساوی $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ صدق می کنند، مقادیر $a$ و $b$ را بیابید.				
۱	حاصل دترمینان زیر را به روش بسط، بیابید.				
۱	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$				
۱	اگر $A = \begin{bmatrix}  A  & 3 \\ 2 &  A  \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A$ را بیابید.				
۱,۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، اعداد $\alpha$ و $\beta$ را چنان بیابید که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$				
۱,۵	اگر دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{bmatrix}$ با دترمینان وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{bmatrix}$ برابر باشد، مقدار $m$ را بیابید.				
۱,۵	دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس وارون، حل کنید.				
۱,۵	$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{y}{6} - \frac{y}{3} \\ x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$				
۱	$A$ و $B$ دو ماتریس مربعی، هم مرتبه و وارون پذیرند که $A + B = AB$ ثابت کنید: $B = (I - A^{-1})^{-1}$				
۲	دو نقطه ی $A$ و $B$ و خط $l$ در صفحه مفروض اند، نقاطی را بیابید که از $A$ و $B$ به یک فاصله بوده و از $l$ به فاصله ی $d$ باشند. ( $d > 0$ )				
۱	معادله ی دایره ای را بنویسید که دو نقطه ی $A(-1, 4)$ و $B(3, 2)$ دو سر یک قطر آن باشند.				

ردیف	ادامه ی سوالات	محل مهر یا امضاء مدیر	نمره
۱۳	شعاع دایره ی $ax^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0$ برابر ۲ می باشد، مقدار $k$ را بیابید.		۱
۱۴	حدود $m$ را چنان بیابید که نقطه ی $A(m, m - 1)$ داخل دایره ی $x^2 + y^2 = 5$ باشد.		۱
۱۵	دایره ای از دو نقطه ی $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ گذشته و خط $l: x - y = 2$ یک قطر آن است، معادله ی دایره را بیابید.		۱,۵
۱۶	وضعیت خط $l: 3x - 4y = 1$ و دایره ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$ را نسبت به هم مشخص کنید.		۱,۵
موفق و مؤید باشید زمانی نژاد			
صفحه ی ۲ از ۲			

جمع بارم : ۲۰ نمره





اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۳ تهران  
 دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد سیدخندان  
**کلید** سوالات پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۹۸-۱۳۹۷

نام درس: هندسه ۳  
 نام دبیر: آقای زمانی نژاد  
 تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۹۷  
 ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر  
 مدت امتحان: ۸۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱		$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & -3 \\ 16 & 12 & -5 \end{bmatrix}$
۲		$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = I$ $A^A = (A^T)^T \times A = I^T \times A = I \times A = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
۳		$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y & 4x-1 \\ 1+y & 2x+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4} \\ 1+y = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases}$
۴		$(A+B)(A-B) = A^T - B^T \rightarrow A^T - AB + BA - B^T = A^T - B^T \rightarrow AB = BA$ $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3a-8 & 3b+4 \\ 2a+12 & 2b-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+2b & -2a+3b \\ 8 & -14 \end{bmatrix}$ $\rightarrow \begin{cases} 3a+12 = 8 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \\ 2b-6 = -14 \rightarrow b = -4 \end{cases}$
۵	بسط نسبت به سطر سوم را می نویسیم:	$\det A = 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 35 = -39$
۶		$ A  = -2$ یا $ A  = 3$
۷		$A^{-1} = \frac{1}{\lambda + 3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ $\alpha A + \beta I = A^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 4\alpha & \alpha \\ -3\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{11} \\ 2\alpha + \beta = \frac{2}{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{11} \\ \beta = 0 \end{cases}$
۸		$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & m & 3 \end{vmatrix} \rightarrow  A  = (6 + 0 - m) - (2 + 0 + 0) = 4 - m$ $ B  = m - 2 \rightarrow  B^{-1}  = \frac{1}{m-2}$ $ A  =  B^{-1}  \rightarrow 4 - m = \frac{1}{m-2} \rightarrow 4m - 8 - m^2 + 2m = 1 \rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \rightarrow (m-3)^2 = 0$ $\rightarrow m = 3$
۹	معادله ی اول را در ۶ و معادله ی دوم را در ۲ ضرب می کنیم:	$\begin{cases} 9x = 7 - 3y \\ 2x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-9 - 6} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{-9}{15} \end{bmatrix}$	$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{-9}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{15}{15} \\ \frac{-13}{15} \\ \frac{15}{15} \end{bmatrix}$		
$A^{-1}(A+B) = A^{-1}(AB) \rightarrow I + A^{-1}B = B \rightarrow I = B - A^{-1}B$ $I = (I - A^{-1})B \rightarrow (I - A^{-1})^{-1} = B$		۱۰	
<p>مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، خط <math>\Delta</math> عمود منصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله <math>d</math> باشند دو خط <math>m_1</math> و <math>m_2</math> به موازات A است، پس جواب مسأله، محل برخورد <math>\Delta</math> با <math>m_1</math> یا <math>m_2</math> است که وضعیت های زیر را داریم :</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="159 448 494 716"> <p>فقد جواب</p> </div> <div data-bbox="590 448 909 739"> <p>دو جواب M و N</p> </div> <div data-bbox="957 448 1340 672"> <p>بی شمار جواب</p> </div> </div>			۱۱
$O = \frac{A+B}{2} = (1, 3)$ $R =  OA  = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\rightarrow \text{دایره : } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$			۱۲
<p>چون معادله ی داده شده، معادله ی دایره است <math>a=1</math>، حال داریم :</p> $x^2 + y^2 + 2x + 4y - k = 0 \rightarrow R = \sqrt{\frac{4 + 16 + 4k}{4}}$ $= \sqrt{5+k} \xrightarrow{R=2} \sqrt{5+k} = 2 \rightarrow 5+k = 4 \rightarrow k = -1$			۱۳
$x^2 + y^2 = 5 \rightarrow O = (0,0), R = \sqrt{5} \rightarrow  OA  = \sqrt{m^2 + (m-1)^2}$ $A \text{ درون دایره است} \rightarrow  OA  < R \rightarrow \sqrt{m^2 + (m-1)^2} < \sqrt{5} \rightarrow 2m^2 - 2m + 1 < 5 \rightarrow m^2 - m - 2 < 0$ $\rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \rightarrow -1 < m < 2$			۱۴
$O \in l \rightarrow O = (\beta + 2, \beta)$ $ OA  =  OB  \rightarrow \sqrt{(\beta + 2)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\beta - 1)^2 + \beta^2}$ $\rightarrow \sqrt{2\beta^2 + 2\beta + 5} = \sqrt{2\beta^2 - 2\beta + 1} \rightarrow 2\beta^2 + 2\beta + 5 = 2\beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 4\beta = -4 \rightarrow \beta = -1$ $\rightarrow O = (1, -1), R =  OB  = \sqrt{5}$ $\rightarrow \text{دایره : } (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$			۱۵
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \rightarrow O = (1, -2), R = \sqrt{\frac{4 + 16 + 12}{4}} = 2\sqrt{2}$ $l \text{ پس خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند} \text{ اند } R < 2 = \frac{ 3(1) - 4(-2) - 1 }{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2 < R$			۱۶
<p>نام و نام خانوادگی مصحح : فرزاد زمانی نژاد</p> <p>امضاء:</p>		<p>جمع بارم : ۲۰ نمره</p>	