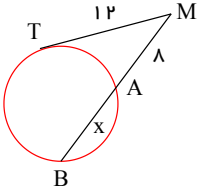




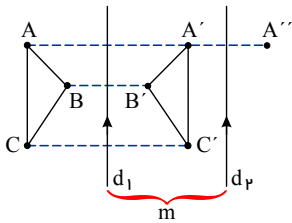
۱- الف) اندازه مماس مشترک خارجی در دو دایره $C(O, 7)$ و $C'(O', 1)$ را با فرض $OO' = 10$ تعیین کنید.
 ب) این دو دایره چند مماس مشترک خارجی دارند؟

۲- با توجه به شکل زیر، مقدار x را تعیین کنید.



۳- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۴- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را $A''B''C''$ بنامید.
 الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$
 ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟
 پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

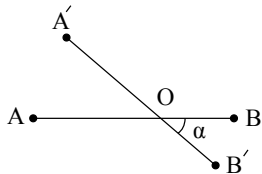


۵- اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

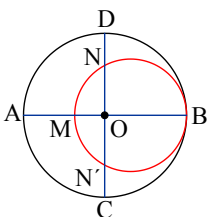
۶- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۷- در شکل مقابل، ثابت کنید دوران طولپا است.



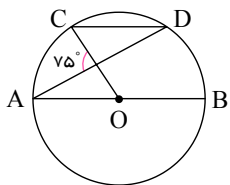
۸- ثابت کنید بازتاب محوری در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۹- در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.





۱- در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ ، اندازه کمان CD را به دست آورید.





پاسخنامه تشریحی

۱ - الف) $R = ۷$

$$R' = ۱ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \rightarrow TT' = \sqrt{۱۰^2 - (۷ - ۱)^2} \rightarrow TT' = ۸$$

$$d = ۱۰$$

ب) دو مماس

- ۲

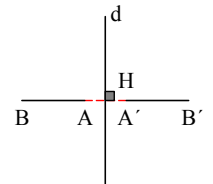
$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow ۱۲^2 = ۸ \times (۸ + x) \Rightarrow x = ۱۰$$

- ۳

$$AB \perp d, H = ۹۰^\circ$$

$$AH = A'H, BH = B'H$$

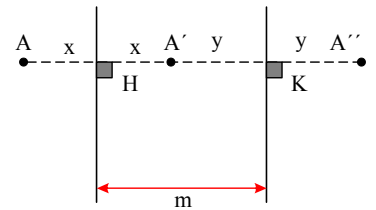
$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



- ۴

$$AH = A'H = x, A'K = A''K = y, x + y = m$$

$$AA'' = ۲(x + y) = ۲m$$



به همین ترتیب داریم:

می توان نتیجه گرفت که $A''B''C''$ تصویر ΔABC ، نتیجه انتقالی با بردار $۲m$ و راستای عمود بر محورهای بازتاب می باشد.

- ۵

که در فرمول های مقابل S مساحت و p نصف محیط می باشد.

$$r_a = \frac{s}{p-a}, r_b = \frac{s}{p-b}, r_c = \frac{s}{p-c}, r = \frac{s}{p}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{s}{p-a}} + \frac{1}{\frac{s}{p-b}} + \frac{1}{\frac{s}{p-c}} = \frac{p-a+p-b+p-c}{s} = \frac{3p-2p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

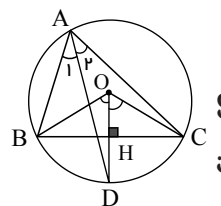
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow h_a = \frac{2s}{a}, h_b = \frac{2s}{b}, h_c = \frac{2s}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

۶ - عمود منصف BC از O مرکز دایره محیطی می گذرد. داریم:

$$\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} = \widehat{CD}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2} = \widehat{BD} = \widehat{CD}$$



نابراین محل برخورد نیمساز زاویه A وسط کمان BC می باشد که همان محل برخورد عمود منصف BC با محیط دایره می باشد.

۷ - مطابق شکل، مرکز دوران نقطه O روی AB است و زاویه دوران α می باشد، داریم:

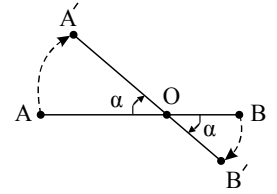


$$AB = AO + OB$$

$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O, OB = OB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (1)$$

طبق خواص دوران

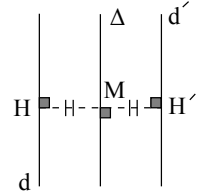


- ۸

در دو حالت بررسی می‌کنیم.

الف. در این حالت محور بازتاب (Δ) با خط d موازی است و در نتیجه بازتاب خط d (خط d') با آن موازی می‌باشد:

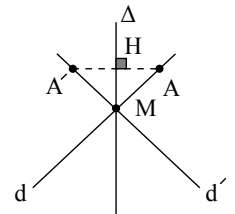
$$\widehat{M} = \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ, MH = MH' \Rightarrow d \parallel \Delta \parallel d'$$



در این حالت شیب خط حفظ می‌شود (چون $d \parallel d'$ است).

ب. در این حالت خط d و محور بازتاب (Δ) متقاطع اند. بازتاب خط d نسبت به محور Δ ، خط d' می‌باشد و d' و Δ در نقطه M متقاطع اند.

$$\Delta : \widehat{H} = 90^\circ, AH = A'H$$



از آنجا که d و d' متقاطع هستند، پس موازی نبوده و در نتیجه شیب خط d و d' یکسان نخواهد بود. بنابراین در این حالت شیب خط حفظ نمی‌شود.

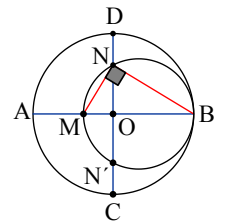
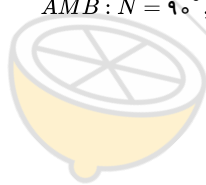
- ۹

$$AM = 16, DN = 10, OA = R \Rightarrow OM = R - 16$$

$$OB = R, ON = R - 10$$

$$\widehat{AMB} : \widehat{N} = 90^\circ, \widehat{O} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = OM \times OB$$

$$(R - 10)^2 = (R - 16) \times R$$



$$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$\text{شعاع دایره کوچکتر} = \frac{BM}{2} = \frac{2R - AM}{2} = \frac{2 \times 25 - 16}{2} = 17$$

- ۱۰

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha \Rightarrow \text{مخاطی } \widehat{A} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\Delta AOM : 75^\circ = \alpha + 2\alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$$

