



۱ دو خط متقاطع مفروض، به چند طریق می‌توانند بازتاب یکدیگر باشند؟

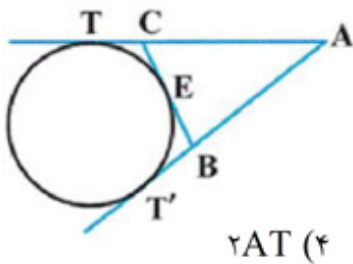
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲ نقاط A و B در یک طرف خط d قرار دارند. اگر A' و B' به ترتیب تصویرهای A و B تحت بازتاب نسبت به خط d باشند، در مورد چهارضلعی ABB'A' کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

- ۱) قطرهای آن با هم برابرند.
 ۲) زوایای مجاور آن با هم برابر یا مکمل‌اند.
 ۳) قطرهای آن منصف هم‌دیگر هستند.
 ۴) محاطی است.

۳ از نقطه‌ای که کمترین فاصله آن تا دایره‌ای به شعاع ۴/۵، برابر ۳ می‌باشد، مماسی رسم کرده‌ایم. طول مماس کدام است؟

- ۱) $3\sqrt{3}$ (۱) ۲) ۶ (۲) ۳) $6\sqrt{2}$ (۳) ۴) $6\sqrt{3}$ (۴)



۴ از نقطه ثابت A دو مماس AT و AT' بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره‌خط متغیر BC بر دایره مماس است، به طوری که نقطه B همواره روی AT' و نقطه C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC کدام است؟

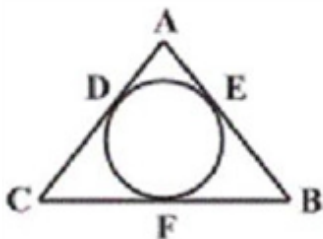
- ۱) $\frac{2}{3}AT$ (۱) ۲) AT (۲) ۳) $\frac{3}{2}AT$ (۳) ۴) $2AT$ (۴)

۵ یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر را در انتقالی که بردار آن ابتدایش یک رأس مربع و انتهایش مرکز مربع است، تصویر می‌کنیم. مساحت ناحیه‌ی مشترک بین مربع و تصویرش کدام است؟

- ۱) ۴ (۱) ۲) ۶ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) ۹ (۴)

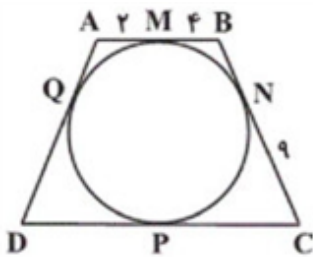
۶ نقطه‌های A(۱, ۳) و B(۲, ۵) مفروض‌اند و نقطه‌ی متغیر M روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم ($y = x$) قرار دارد. کم‌ترین مقدار $MA + MB$ کدام است؟

- ۱) $\sqrt{7}$ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) $\sqrt{17}$ (۳) ۴) ۵ (۴)



۷ مطابق شکل زیر دایره‌ی محاطی مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ در نقاط D, E, F بر اضلاع این مثلث مماس است. اگر $AE = 2$ و $CF = 8$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

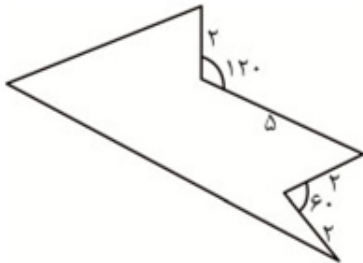
- ۱) $\frac{16}{3}$ (۱) ۲) $\frac{8}{3}$ (۲) ۳) $\frac{4}{3}$ (۳) ۴) $\frac{14}{3}$ (۴)



۸ دوزنقه ABCD محیطی است، طول DQ کدام است؟

- ۱۸ (۱)
- ۱۶ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۲۴ (۴)

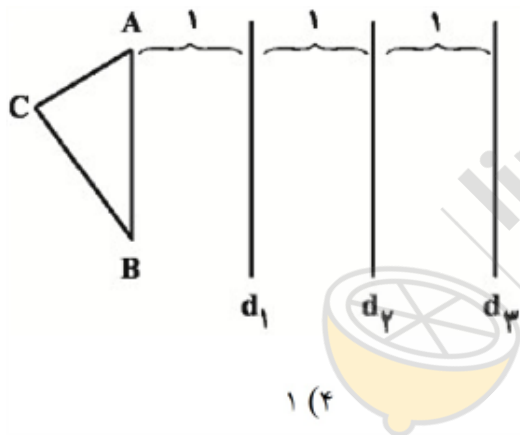
۹ در شکل زیر دور زمین‌ها حصارکشی شده است. اگر بخواهیم بدون تغییر اندازه حصارها و تعداد و طول ضلع‌ها، مساحت را افزایش دهیم، مساحت حداکثر چقدر افزایش می‌یابد؟



- $7\sqrt{3}$ (۱)
- $6\sqrt{3}$ (۲)
- $3\sqrt{3}$ (۳)
- ۷ (۴)

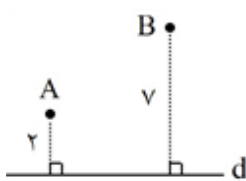
۱۰ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\hat{A} = 90^\circ$ ، $AB = 3$ و $AC = 4$. دو دایره به قطرهای AB و AC رسم می‌کنیم، اندازه‌ی وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

- ۲/۳ (۴)
- ۲/۴ (۳)
- ۲/۸ (۲)
- ۲/۶ (۱)



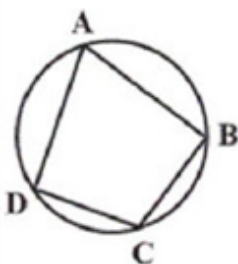
۱۱ مطابق شکل با فرض موازی بودن خطوط d_1 ، d_2 و d_3 ، مثلث ABC را ابتدا نسبت به d_3 بازتاب داده تا $A'B'C'$ حاصل شود. سپس $A'B'C'$ را نسبت به d_2 بازتاب می‌دهیم تا $A''B''C''$ حاصل شود و در نهایت $A''B''C''$ را نسبت به d_1 بازتاب می‌دهیم، تا $A'''B'''C'''$ حاصل شود. اگر فاصله رأس A تا خط d_1 برابر ۱ باشد، آنگاه طول AA'' کدام است؟

- ۱ (۴)
- ۲ (۳)
- ۳ (۲)
- ۴ (۱)



۱۲ مطابق شکل اگر کوتاه‌ترین مسیر AMB (روی خط d قرار دارد) برابر با ۱۵ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

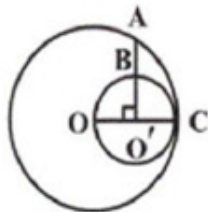
- ۱۳ (۲)
- ۱۲ (۱)
- ۹ (۴)
- ۱۰ (۳)



۱۳ در شکل زیر $\hat{C} = \hat{A}$ ، $AB = AD = 3$ و $BC = CD$ است. شعاع دایره کدام است؟

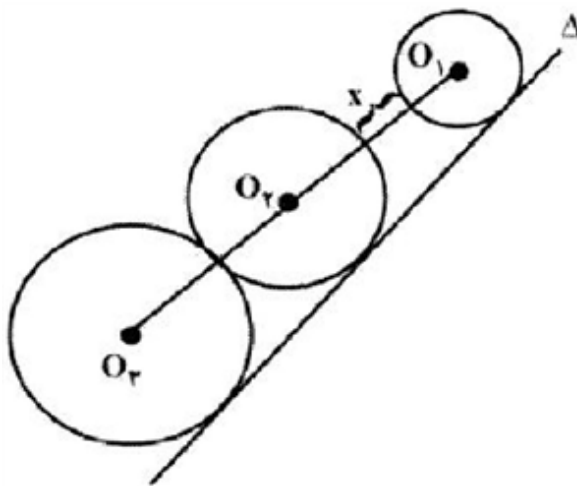
- $\sqrt{3}$ (۲)
- $\sqrt{2}$ (۱)
- ۲ (۴)
- ۱ (۳)

در شکل زیر نقاط O و O' به ترتیب مراکز دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر هستند. اگر AO' عمود بر OC و AB = √3 + 1 باشد شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟



- (۱) ۲ + √3
- (۲) ۴ + √3
- (۳) ۲ + ۲√3
- (۴) ۴ + ۲√3

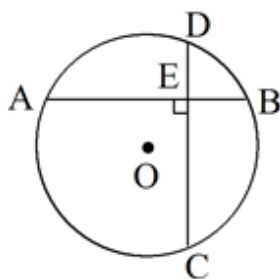
در شکل زیر، شعاع دایره‌های به مرکز O_۱, O_۲ و O_۳ به ترتیب R و ۲R و ۳R بوده و دایره‌های به مرکز O_۲ و O_۳ بر هم و هر سه دایره بر خط Δ مماس‌اند. اگر مرکز هر سه دایره روی یک خط واقع باشند، مقدار X کدام است؟



- (۱) R/۲
- (۲) R
- (۳) ۳/۲ R
- (۴) ۲R

۱۶ مربع ABCD درون یک دایره به شعاع واحد محاط شده است. از نقطه O مرکز دایره به نقطه‌ی M وسط ضلع AB وصل می‌کنیم و آنرا امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌ی P قطع کند. طول AP چه قدر است؟

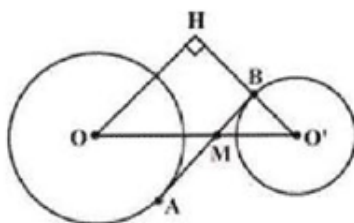
- (۱) √(۱ + √۲)
- (۲) √(√۲ - ۱)
- (۳) √(۲ + √۲)
- (۴) √(۲ - √۲)



۱۷ اگر وترهای AB و CD در نقطه‌ی E بر یک‌دیگر عمود باشند، با توجه به شکل مساحت دایره برابر است با: (AE = ۱۲, CE = ۶, ED = ۴)

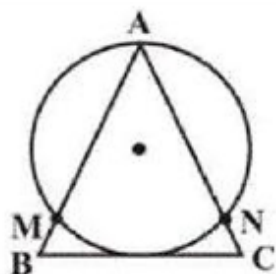
- (۱) ۵۰π
- (۲) ۴۵π
- (۳) ۴۰π
- (۴) ۳۵π

۱۸ در شکل زیر، OH = ۳ و O'H = ۴ و AB مماس مشترک داخلی دو دایره است و AB || OH. اگر اندازه‌ی



پاره‌خط AM برابر ۱۵/۸ باشد، آن‌گاه شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام است؟

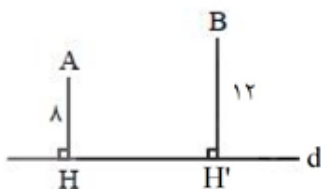
- (۱) ۳/۲
- (۲) ۳/۴
- (۳) ۱
- (۴) ۵/۸



در شکل روبه‌رو، مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($AB = AC$) و ضلع BC به طول ۱۰ بر دایره مماس است. اگر طول ارتفاع وارد بر قاعده BC برابر ۱۰ و شعاع دایره برابر ۵ باشد، طول پاره‌خط MN کدام است؟

- (۱) ۸
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۱۰

با توجه به شکل، فواصل نقاط A و B از خط d به ترتیب ۸ و ۱۲ و فاصله H و H' برابر ۱۵ است. نقطه‌ای مانند M روی d که $MA + MB$ کم‌ترین مقدار خود را دارد، در نظر بگیرید. MA کدام است؟



- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) $\frac{\sqrt{481}}{2}$

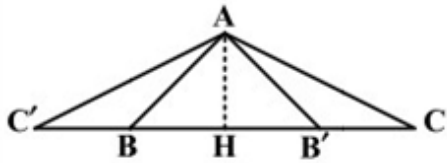


limoonad
Education For All

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

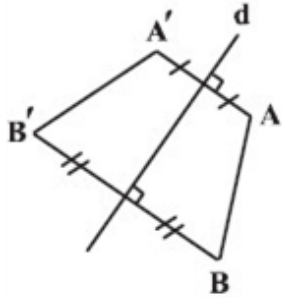
۱

دو خط متقاطع نسبت به نیمسازهای دو زاویه مجانب خود بازتاب یکدیگرند پس به ۲ طریق گزینه ۲ درست است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲



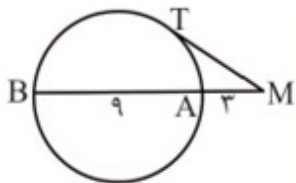
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \left. \begin{array}{l} \\ AB = A'B' \text{ (بازتاب طولیا است)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

چهارضلعی $ABB'A'$ دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محاطی است (گزینه‌ی ۴). از طرفی در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند (گزینه‌ی ۱) و زوایای مجاور به قاعده برابر و زوایای مجاور به ساق مکمل هم‌دیگر هستند (گزینه‌ی ۲). گزینه‌ی ۳ تنها در صورتی درست است که $AB \parallel d$ باشد که در این حالت چهارضلعی $ABB'A'$ مستطیل خواهد بود.

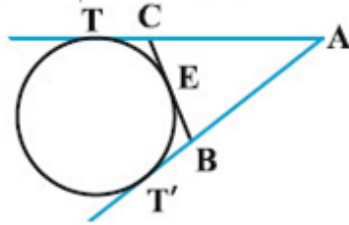
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳



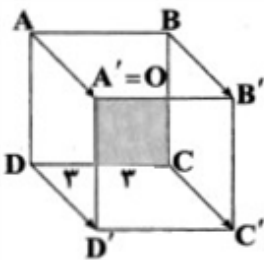
$$MT^2 = MA \times MB = 3(3 + 9) = 36 \Rightarrow MT = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون از نقطه A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT = AT'$ و داریم:



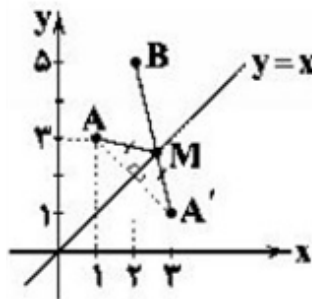
$$\begin{cases} BE = BT' \\ CE = CT \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{محیط مثلث } ABC &= AB + AC + BC = AB + BE + CE + AC \\ &= AB + BT' + CT + AC = AT' + AT = 2AT \end{aligned}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، O مرکز مربع ABCD است. این مربع را تحت انتقال با AO تصویر می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ به دست می‌آید. ناحیه‌ی مشترک بین این دو مربع، به ضلع ۳ سانتی‌متر است که مساحت آن برابر ۹ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر خط $y = x$ را محور بازتاب در نظر بگیریم، آن‌گاه مطلوب مسئله، یافتن کوتاه‌ترین مسیر است که برای یافتن آن به کمک روش هرون، ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط $y = x$ می‌یابیم که برابر است با $A'(3, 1)$. حال فاصله‌ی $A'B$ همان طول کوتاه‌ترین مسیر است.

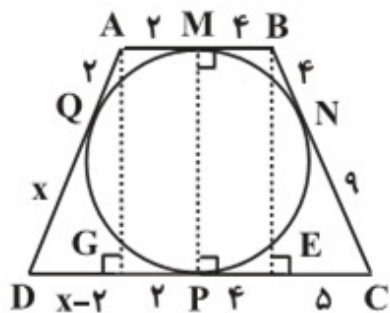


$$\begin{aligned} MA + MB &= MA' + MB = A'B \\ &= \sqrt{(2-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای خارج آن دایره با هم برابرند، بنابراین $AD = 2$ و $CD = 8$. از آنجایی که مثلث متساوی‌الساقین است، پس $EB = 8$ و در نتیجه $FB = 8$ است. با توجه به برابری BF و CF ، AF میانه‌ی وارد بر قاعده است. از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین میانه‌ی وارد بر قاعده، ارتفاع هم می‌باشد. بنابراین AF از ارتفاع وارد بر BC است.

$$AF^2 + FB^2 = AB^2 \Rightarrow AF^2 + 64 = 100 \Rightarrow AF = 6$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{10 + 10 + 16}{2} = 18 \\ S = \frac{AF \times BC}{2} = \frac{6 \times 16}{2} = 48 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده بر یک دایره از نقطه‌ای بیرون آن دایره با هم مساوی‌اند. بنابراین با فرض $DQ = x$ داریم:
 $DP = x, PC = 9, AQ = 2, BN = 4$
 از A و B عمودهای BE و AG را بر CD رسم می‌کنیم.

$$DG = x - 2, GP = 2, PE = 4, EC = 5$$

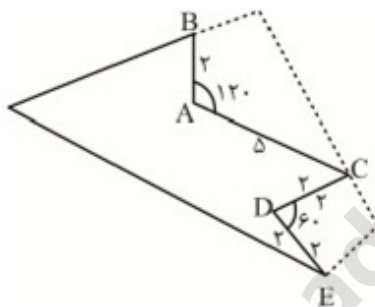
$$\triangle BEC: BE^2 + EC^2 = BC^2 \Rightarrow BE^2 + 25 = 169$$

$$\Rightarrow BE^2 = 144 \Rightarrow BE = 12 \Rightarrow AG = MP = BE = 12$$

$$\triangle AGD: AG^2 + DG^2 = AD^2 \Rightarrow 144 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2$$

$$\Rightarrow 144 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 144 = 8x \Rightarrow x = 18$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



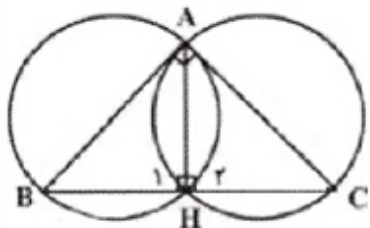
به کمک بازتاب مساحت قسمت‌های فرورفته را افزایش می‌دهیم بنابراین به اندازه دو برابر مجموع مساحت دو مثلث \widehat{ABC} و \widehat{CDE} به مساحت افزوده می‌شود.

$$\text{مساحت افزایش یافته} = 2(S_{ABC} + S_{CDE})$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \right) = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. \widehat{AHC} و \widehat{AHB} زوایای محاطی روبه‌رو به قطر هستند، پس برابر با 90° درجه می‌باشند. لذا روی یک خط راست قرار دارند و AH ارتفاع وارد بر وتر است.

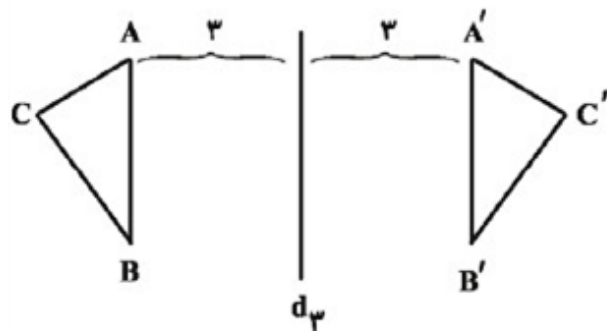


$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

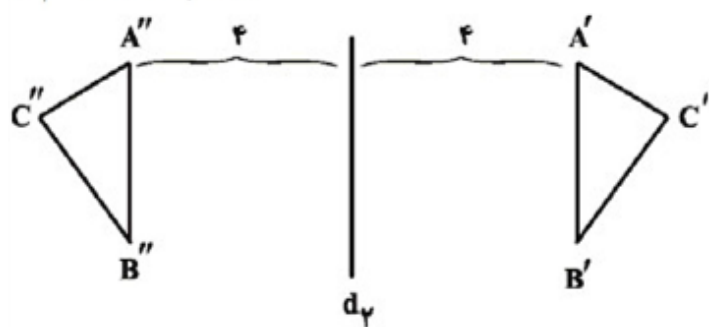
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times AH \times 5 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

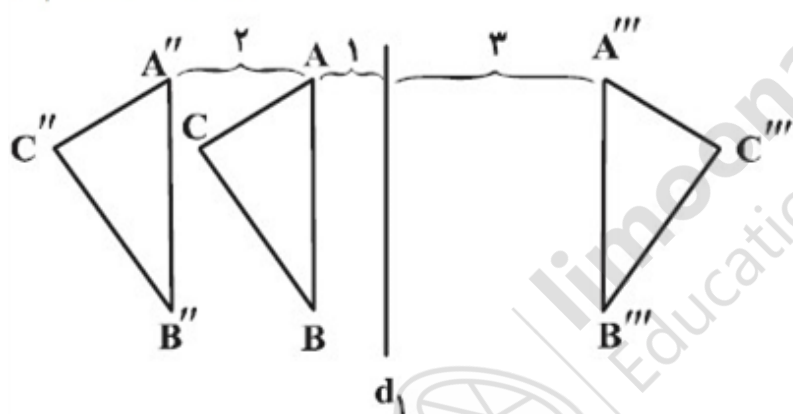
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به تعریف بازتاب داریم:



(بازتاب نسبت به d_p)



(بازتاب نسبت به d_p)

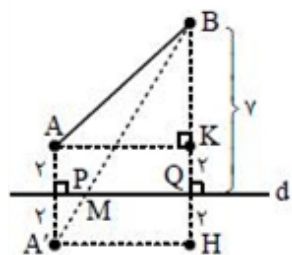


(بازتاب نسبت به d_1)

در نتیجه مطابق شکل بالا، فاصله AA''' برابر با ۴ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای یافتن نقطه M که مسیر کوتاهترین مسیر باشد، بازتاب A نسبت به d را می‌یابیم (A'). کوتاهترین مسیر می‌باشد، داریم:

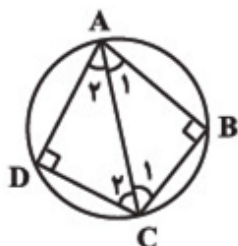


$$AMB \text{ (کوتاه ترین مسیر)} = A'B = 15 \text{ و } BH = 2 + 7 = 9$$

$$A'BH: A'H = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ و } A = A'H = 2$$

$$ABK: AB^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow AB = 13$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک چهارضلعی محاطی، مجموع اندازه‌های هر دوزاویه مقابل برابر 180° است. بنابراین داریم:



$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C} = 2\hat{A}} 3\hat{A} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 120^\circ$$

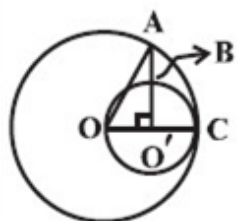
$$\left. \begin{matrix} AB = AD \\ BC = CD \\ AC = AC \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 60^\circ \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ \end{cases}$$

بنابراین زاویه B در مثلث ABC، قائمه و AC قطر دایره است. در نتیجه داریم:

$$\hat{C}_1 = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2R = 2\sqrt{3} \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید شعاع دایره‌های بزرگ‌تر و کوچک‌تر را به ترتیب با R و R' نمایش دهیم. مطابق شکل داریم:



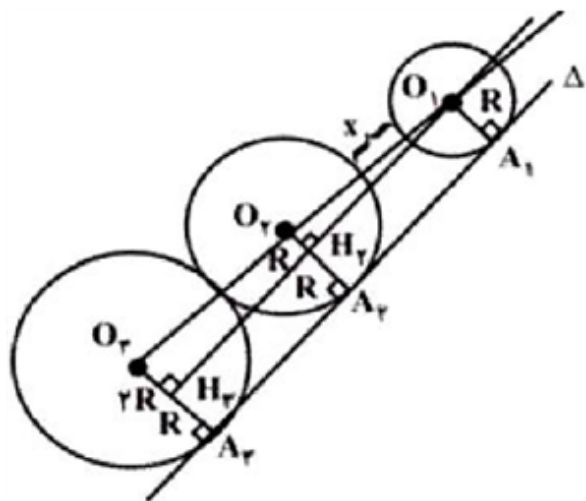
$$OC = 2OO' \Rightarrow R = 2R'$$

$$A\hat{O}O': O'A^2 = OA^2 - OO'^2$$

$$\Rightarrow (AB + R')^2 = 4R'^2 - R'^2 \Rightarrow (AB + R')^2 = 3R'^2$$

$$\Rightarrow AB + R' = \sqrt{3}R' \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)R' = AB \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)R' = \sqrt{3} + 1$$

$$\Rightarrow R' = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2R' = 4 + 2\sqrt{3}$$



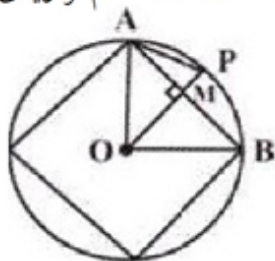
$$O_2 H_2 \parallel O_3 H_3$$

$$\Rightarrow \frac{O_2 H_2}{O_3 H_3} = \frac{O_1 O_2}{O_1 O_3}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2R} = \frac{R+x+2R}{R+x+2R+2R}$$

$$\Rightarrow x = 2R$$

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. از آنجا که $OA = OB$ می باشد پس مثلث OAB متساوی الساقین است و در نتیجه میانه ی OM ، ارتفاع و نیمساز نیز می باشد. پس با توجه به این که $\widehat{AOM} = 45^\circ$ ، مثلث OAM قائم الزاویه ی متساوی الساقین است.



$$\widehat{AOM} = \widehat{OM} = \widehat{AM} = \widehat{OA} = 45^\circ$$

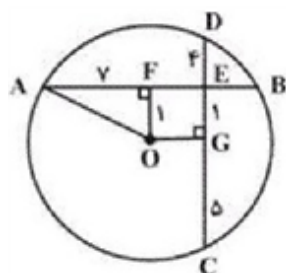
$$\Rightarrow OM = AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MP = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle PAM : AP^2 = AM^2 + PM^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow AP = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$



limoonad Education For All

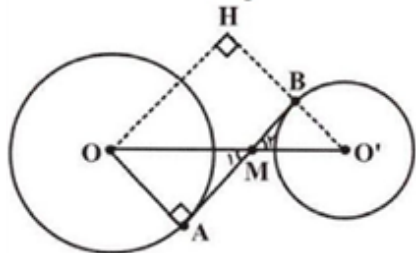
گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. از مرکز O به دو وتر AB و CD عمود کنیم تا آنها را در نقاط F و G قطع کند.



$$AE \times EB = CE \times ED \Rightarrow 12 \times EB = 6 \times 4 \Rightarrow EB = 2$$

$$OA^2 = 7^2 + 1^2 = 50 \Rightarrow S = \pi R^2 = \pi(OA)^2 = 50\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل براساس قضیه فیثاغورس در مثلث OHO' نتیجه می شود که:



$$OO' = \sqrt{OH^2 + O'H^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

از طرفی چون $AB \parallel OH$ و $AO \parallel BH$ و $\hat{B} = 90^\circ$ پس چهارضلعی $OABH$ مستطیل است و در نتیجه $AB = OH = 3$ و طبق فرض $AM = \frac{15}{8}$ ، پس: $BM = AB - AM = \frac{9}{8}$.

حال دو مثلث OAM و $O'BM$ را در نظر می گیریم که در آنها $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ پس دو مثلث متشابه اند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{O'B}{OA} = \frac{BM}{AM}$$

با اضافه کردن صورت کسرها به مخرج ها و با توجه به این که $O'B + OA = O'H = 4$ نتیجه می شود:

$$O'B \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow O'B = 4 \times \frac{\frac{9}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$BT = \frac{BC}{2} = 5$$

$$AB^2 = AT^2 + BT^2 = 100 + 25 = 125 \Rightarrow AB = 5\sqrt{5}$$

طبق روابط طولی در دایره:

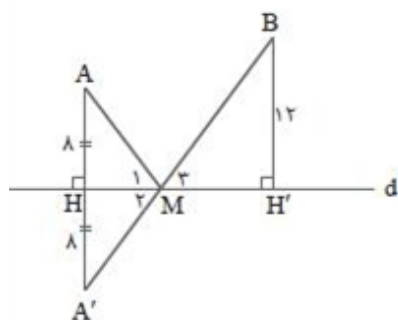
$$BT^2 = BM \times BA \Rightarrow 25 = BM \times 5\sqrt{5}$$

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow MN = 8$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن M باید ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کنیم و آن را A' بنامیم و از A' به B وصل کنیم. برخورد این خط با d همان نقطه M است. در مثلث متساوی الساقین MAA' ، MH ارتفاع است، بنابراین MH نیمساز است، داریم:



$$\begin{cases} M_1 = M_2 \\ M_1 = M_3 \end{cases} \Rightarrow M_2 = M_3$$

در نتیجه مثلث‌های MAH و MBH' متشابه هستند.

$$\widehat{M_1} = \widehat{M_3}, \widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{H'M}$$

فرض کنیم $MH = x$ ، بنابراین: $H'M = 15 - x$.

$$\Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{15 - x} \Rightarrow 10 - 8x = 12x \Rightarrow 20x = 120 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow AM^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AM = 10$$



limoonad
Education For All

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴



limoonad
Education For All