

محل مهر یا امضای مدیر

بسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران

نوبت امتحانی : فرادماه ۹۸

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

سال تحصیلی ۱۳۹۸-۱۳۹۷

اداره آموزش و پرورش منطقه ۶ تهران

نام و نام خانوادگی :

تاریخ امتحان : ۰۱ / ۰۳ / ۹۸



درس : حسابان ۱

دبیرستان غیر دولتی دکتر حسابی

پایه : یازدهم ریاضی



زمان امتحان : ۱۳۵ دقیقه

نام دبیر :

۱- در دنباله حسابی ... ۱, ۲, ۱/۳ حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\beta-2} + \frac{\beta}{\alpha-2}$ را بنویسید.

۳- معادله $x - 1 = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ را حل کنید.

۴- معادله $|2x - 1| + |x| = 7$ را حل کنید.

به حروف :

نمره تجدید نظر (به عدد) :

به حروف :

نمره ورقه (به عدد) :

تاریخ / امضاء :

نام و نام خانوادگی دبیر :

تاریخ / امضاء :

نام و نام خانوادگی دبیر :

۵- نمودار تابع $f(x) = x[2x]^{-\frac{1}{2}}$ را در بازه $[-1, \frac{1}{2}]$ رسم کنید.

۶- یک به یک بودن تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ را بررسی کنید.

۷- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 5), (4, 3), (5, 1)\}$ را داشته باشیم،
مطلوبست محاسبه‌ی $f \circ g$ و $2f - 3g$

۸- جواب معادله $4^{1-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 72$ را بدست آورید.

۹- حاصل $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt{2} - 2 \log_{25} \sqrt[3]{5} + \log_{(\sqrt{3}+1)} (4 + 2\sqrt{3})$ را بدست آورید.

۱۰- معادله $\log(x-3) + \log(x+3) - \log x = 3 \log 2$ را حل کنید.



limoonad
Education For All

۱۱- زاویه 120° در دایره‌ای، کمانی به طول ۴۸ سانتی متری می‌سازد شعاع دایره را بیابید.

۱۲- اگر $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ باشد، حاصل $\frac{2 \sin 165^\circ - \sin 105^\circ}{\cos 345^\circ + \sqrt{3} \cos 285^\circ}$ را بدست آورید.

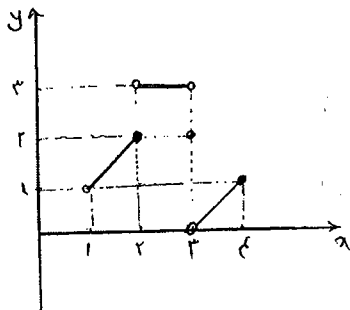
۱۳- نمودار $y = \left| 1 - 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right|$ را به کمک انتقال در یک دوره تناوب آن را رسم کنید.

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$$

۱۴- ثابت کنید:



۱۵- با توجه به نمودار f ، حدهای زیر را محاسبه کنید:



۱) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

۲) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

۳) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(f(x)) =$

۱۶- حد تابع $f(x) = [\cos x]$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ بررسی کنید.

۱۷- حدهای زیر را حساب کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x - 5}{x^2 + x^2 - 2} =$

۲) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x - \sqrt{1-3x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{2}} =$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{(4x - \pi)^2} =$

۱۸- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} [x] - 2a & x < 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x} & x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.



limoonad
Education For All



۱- در دنباله حسابی ... ۵, ۸, ۱۱, ... حداقل چند جمله را باهم جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$a_1 = 5$
 $d = 3$
 $S_n > 493 \Rightarrow \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] > 493$
 $\Rightarrow n(7+3n) > 986 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 986 > 0$

حاصل ۱۸ جمله
 $\Delta = 11,881 \Rightarrow n = \frac{-7 \pm 109}{6}$

۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\beta-2} + \frac{\beta}{\alpha-2}$ را بنویسید.

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4$
 $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 2$
 $\frac{\alpha}{\beta-2} + \frac{\beta}{\alpha-2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 2\beta}{\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4} = \frac{S^2 - 4P - 4S}{P - 2S + 4}$
 $= \frac{16 - 8 - 16}{2 - 8 + 4} = \frac{-8}{-2} = 4$

۳- معادله $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = x - 1$ را حل کنید.

$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = x-1$
 $\frac{(x-1)}{(\sqrt{x+1})^2} = (x-1) \Rightarrow (x-1) \left(\frac{1}{(\sqrt{x+1})^2} - 1 \right) = 0$
 $\begin{cases} x=1 \\ (\sqrt{x+1})^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \rightarrow x=0 \\ \sqrt{x+1} = -1 \rightarrow x=-2 \end{cases}$

۴- معادله $|2x-1| + |x| = 7$ را حل کنید.

$x < 0 \Rightarrow -2x+1-x=7 \Rightarrow -3x=6 \Rightarrow x=-2$
 $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x+1+x=7 \Rightarrow -x=6 \Rightarrow x=-6$
 $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1+x=7 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$x = -2, \frac{8}{3}, 0$

نمره ورقه (به عدد):	نمره تجدید نظر (به عدد):	به حروف:	به حروف:
نام و نام خانوادگی دبیر:	نام و نام خانوادگی دبیر:	تاریخ / امضاء:	تاریخ / امضاء:

۵- نمودار تابع $f(x) = x[2x] - 1$ را در بازه $[-1, \frac{1}{2}]$ رسم کنید.

$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 1$

$-2 \leq 2x < -1 \xrightarrow{[2x]=-2} y = -2x - 1 \quad -1 \leq x < -\frac{1}{2}$

$-1 \leq 2x < 0 \xrightarrow{[2x]=-1} y = -x - 1 \quad -\frac{1}{2} \leq x < 0$

$0 \leq 2x < 1 \xrightarrow{[2x]=0} y = -1 \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$

$2x = 1 \xrightarrow{[2x]=1} y = \frac{1}{2}$

۶- یک به یک بودن تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ را بررسی کنید.

$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2}$

$\Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} + \frac{1}{2} = x_2 + \sqrt{x_2} + \frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt{x_1} + \frac{1}{2})^2 = (\sqrt{x_2} + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \sqrt{x_1} + \frac{1}{2} = \sqrt{x_2} + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$

۷- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 5), (4, 3), (5, 1)\}$ را داشته باشیم،
 مطلوبست محاسبه $f \circ g$ و $f \circ f$

$f \circ g = \{(1, 3), (2, 4), (5, 2)\}$

$f \circ f = \{(1, -2), (2, -1), (5, 1)\}$

۸- جواب معادله $4^{1-x} + (\frac{1}{2})^{2x+1} = \sqrt{2}$ را بدست آورید.

$2^{2-2x} + 2^{-2x-1} = \sqrt{2}$

$2^{2-2x} (2^2 + 2^{-1}) = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{-2x} \times \frac{9}{2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow 2^{-2x} = \frac{2}{9} \Rightarrow -2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

۹- حاصل $\log_2 2\sqrt{2} - 2 \log_{10} \sqrt{5} + \log_{(\sqrt{2}+1)} (4 + 2\sqrt{2})$ را بدست آورید.

$\log_2 2^{\frac{3}{2}} - 2 \log_{10} 5^{\frac{1}{2}} + \log_{(\sqrt{2}+1)} (2\sqrt{2}+1)^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} + 2 = \frac{-6-2+18}{5} = \frac{10}{5} = 2$

۱۰- معادله $\log(x-3) + \log(x+3) - \log x = 3 \log 2$ را حل کنید.

$\log \frac{x^2-9}{x} = \log 2^3 \Rightarrow \frac{x^2-9}{x} = 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 9 = 0$

$\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{9}{8} \end{cases} \quad \checkmark$

۱۱- زاویه ۱۲۰ در دایره‌ای، کمانی به طول ۴۸ سانتی متری سازد شعاع دایره را بیابید.

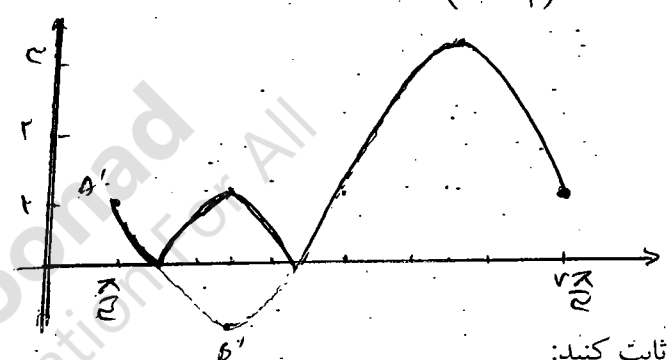
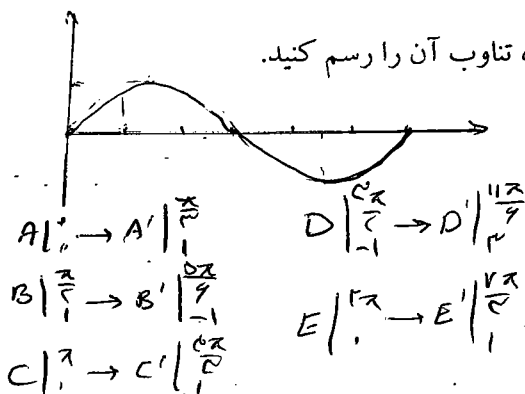
$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{r\alpha}{r} = \frac{48}{r} \Rightarrow r = \frac{48}{\alpha} \approx 24$$

۱۲- اگر $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$ باشد، حاصل $\frac{2 \sin 165^\circ - \sin 105^\circ}{\cos 135^\circ + \sqrt{3} \cos 155^\circ}$ را بدست آورید.

$$\frac{2 \sin(\pi - 15^\circ) - \sin(\frac{\pi}{2} + 15^\circ)}{\cos(\pi - 15^\circ) + \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - 15^\circ)} = \frac{2 \sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin 15^\circ} = \frac{2 - \cot 15^\circ}{\cot 15^\circ - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 - (2 + \sqrt{3})}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

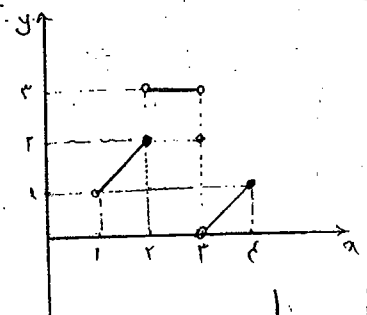
۱۳- نمودار $y = |1 - 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})|$ را به کمک کمک انتقال در یک دوره تناوب آن را رسم کنید.



$\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

۱۵- با توجه به نمودار f ، حدهای زیر را محاسبه کنید:



۱) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \end{cases}$ این یعنی در $x=1$ حد ندارد

۲) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \end{cases}$ X

۳) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(f(x)) = f(f(3^-)) = f(3) = 1$

۱۶- حد تابع $f(x) = [\cos x]$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\cos \frac{\pi}{2}] = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [G_n] = [G_{\frac{\pi}{2}^-}] = [0^+] = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [G_n] = [G_{\frac{\pi}{2}^+}] = [0^-] = -1 \end{cases}$$

۱۷- حدهای زیر را حساب کنید:

۱) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 + x^2 - 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{2}{4}$$

۲) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x - \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{2}} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{-2n - \sqrt{1-2n}}{\sqrt{1-n} - \sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{-2n + \sqrt{1-2n}}{-2n + \sqrt{1-2n}} \times \frac{\sqrt{1-n} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-n} + \sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{(2n^2 + 2n - 1)(\sqrt{1-n} + \sqrt{2})}{(1-n-2)(-2n + \sqrt{1-2n})} = \lim_{n \rightarrow -1} \frac{(2n-1)(\sqrt{1-n} + \sqrt{2})}{-(-2n + \sqrt{1-2n})} = \frac{-5(\sqrt{2})}{-2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 1}{(2x - \pi)^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 2t) - 1}{(2t)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 t}{4t^2}$$

$$\begin{cases} 2t = \frac{\pi}{2} - x \\ x = \frac{\pi}{2} + t \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t^2}{4t^2} = -\frac{1}{2}$$

۱۸- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} [x] - 2a & x < 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x} & x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} ([x] - 2a) = -1 - 2a$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos n}}{\tan 2n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2\sin^2 \frac{n}{2}}}{\frac{2\sin n \cos n}{n}} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} |\sin \frac{n}{2}|}{2 \frac{\sin n}{n} \cos n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sin \frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}}{2 \frac{\sin n}{n} \cos n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(0) = b - 1 & \Rightarrow b - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ -1 - 2a = \frac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$