



۱ اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه راس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از راس A کدام است؟

- ۱ $y = -x - 3$ ۲ $y = -x + 1$ ۳ $y = -2x$ ۴ $y = x + 3$

۲ دو رأس غیر مجاور یک مربع روی خط به معادله $3x - 4y = 1$ قرار دارند. اگر نقطه $(2, 1)$ رأس دیگری از مربع باشد، در این صورت مساحت مربع کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{2}{25}$ ۳ $\frac{1}{10}$ ۴ $\frac{5}{2}$

۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 6 = 0$ باشند، آن گاه حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3$ کدام است؟

- ۱ ۸۸ ۲ ۲۶۴ ۳ ۴۴ ۴ ۳۵۲

۴ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ -۱ ۳ ۱ ۴ ۴

۵ اگر $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله $\frac{5-m}{2x} + \frac{m-3}{x(x+4)} = \frac{x}{x^2+3x-4}$ باشد، آن گاه جواب دیگر کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ -۳ ۳ ۵ ۴ -۵

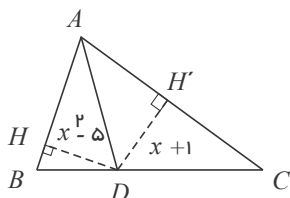
۶ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{3x^2+2x-1} + \sqrt{2x+2+3x^2} = 1$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ صفر

۷ اگر $\frac{2m+n}{3m-n} = \frac{3}{2}$ باشد، آنگاه نسبت n به m کدام است؟

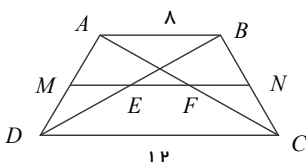
- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۱ ۴ ۳

۸ در شکل زیر، اگر $AC = x + 3$ ، $AB = x + 2$ و AD نیمساز زاویه A باشد، نسبت $\frac{AC}{AB}$ کدام است؟

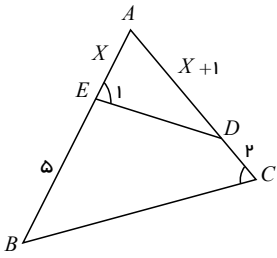


- ۱ $\frac{5}{4}$ ۲ $\frac{6}{5}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{7}{6}$

۹ در شکل زیر، $ABCD$ دوزنقه و M و N وسط دو ساق است. طول EF کدام است؟



- ۱ ۲ ۲ ۱٫۵ ۳ ۱ ۴ $\frac{3}{4}$



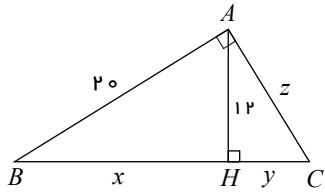
۱۰ اگر در شکل زیر $\hat{E}_1 = \hat{C}$ باشد، مساحت چهارضلعی $EDCB$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)



۱۱ در شکل زیر، $\hat{A} = 90^\circ$ و $AH = 12$ ارتفاع است. در این صورت $x + y + z$ کدام است؟

۳۰ (۲)

۴۰ (۱)

۵۰ (۴)

۴۵ (۳)

۱۲ دامنه‌ی تعریف تابع $y = \sqrt{4 - \sqrt{x + 1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۱۶ (۲)

۱۷ (۱)

۱۳ اگر $3a = [\sqrt{2} - 3] + [3\sqrt{2} - 4] + [2\sqrt{2} - 5]$ حاصل $[2a - 1]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

-۲ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۵ (۱)

۱۴ اگر تابع $f = \{(m^2 + 2m, 2), (m + 3, 4), (4 - m, 2), (2, -2)\}$ معکوس پذیر باشد، m چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

بی شمار (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۵ وارون تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \leq 1$ کدام گزینه می باشد؟

$1 - \sqrt{1-x}$ (۴)

$1 + \sqrt{1-x}$ (۳)

$1 - \sqrt{x-1}$ (۲)

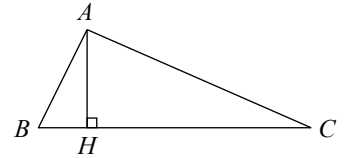
$1 + \sqrt{x-1}$ (۱)



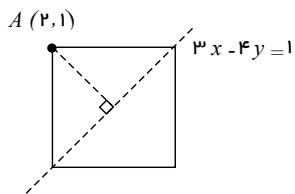
پاسخنامه تشریحی

شکل فرضی روبرو را در نظر بگیرید، در ابتدا شیب ضلع BC را به دست می آوریم و چون ارتفاع بر ضلع BC عمود است پس شیبش عکس و قرینه ی شیب ضلع BC است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0 + 2}{3 - 1} = 1 \xrightarrow{AH \perp BC} m_{AH} = -1$$



AH ارتفاع AH معادله ی ارتفاع $y - 2 = -1(x + 1) \rightarrow y = -x + 1$



رسم یک تصویر مقدماتی به حل سوال کمک می نماید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

با توجه به نمودار، فاصله نقطه A تا خط مورد نظر، نصف طول قطر می باشد. برای محاسبه فاصله نقطه از خط معادله را به فرم $3x - 4y - 1 = 0$ نوشته و از رابطه زیر استفاده می نمایم.

$$\text{نصف طول قطر} : d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) - 4(1) - 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \text{قطر} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$$

مربع یک لوزی هم می باشد پس برای محاسبه مساحت می توان نوشت:

$$\text{مساحت } S = \frac{1}{2} (\text{قطر})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$x^2 - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 2\alpha - 6 = 0 \rightarrow \alpha^2 - 6 = 2\alpha$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$(\alpha^2 - 6)^2 + 8\beta^2 = (2\alpha)^2 + 8\beta^2 = 4\alpha^2 + 8\beta^2 = 4(\alpha^2 + 2\beta^2)$$

$$= 4(S^2 - 2PS) = 4(2^2 - 2(-6)(2)) = 4(4 + 24) = 4(28) = 112$$

بیشترین مقدار تابع درجه ی دوم همان عرض رأس سهمی است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \rightarrow 4ac - b^2 = 0 \rightarrow 4(k+3)(k) - 16 = 0$$

$$\rightarrow 4k^2 + 12k - 16 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

تابع درجه ی دوم وقتی دارای Max است که ضریب x^2 منفی باشد پس فقط $k = -4$ قابل قبول است.

$x = 2$ در معادله صدق می کند: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\frac{5-m}{4} + \frac{m-3}{2 \times 6} = \frac{2}{4+6-4} \Rightarrow \frac{5-m}{4} + \frac{m-2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{15 - 3m + m - 3}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow 12 - 2m = 4 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

توجه کنید که $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ با جایگذاری $m = 4$ در معادله، آن را حل می کنیم:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)} \Rightarrow \frac{x+4+2}{2x(x+4)} = \frac{x}{(x+4)(x-1)}$$

$$\rightarrow (x+6)(x-1) = 2x^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

با فرض $t = 3x^2 + 2x - 1$ معادله را حل می کنیم.



معادله ریشه حقیقی ندارد. $\sqrt{t} + \sqrt{t+3} = 1 \rightarrow \sqrt{t+3} = 1 - \sqrt{t} \xrightarrow{\text{توان } 2} t+3 = 1+t-2\sqrt{t} \rightarrow 2\sqrt{t} = -2 \rightarrow \sqrt{t} = -1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$\frac{2m+n}{3m-n} = \frac{3}{2} \rightarrow 4m+2n = 9m-3n \rightarrow 5n = 5m \rightarrow \frac{n}{m} = 1$$

هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$DH = DH' \rightarrow x^2 - 5 = x + 1 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \checkmark \\ x = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{x+3}{x+2} = \frac{6}{5}$$

با توجه به اینکه M و N وسط دو ساق قرار گرفته می‌توان نتیجه گرفت:

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = 1 \rightarrow MN \parallel AB \parallel DC$$

$$ME \parallel AB \xrightarrow{\Delta ADB} \frac{ME}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{2} \rightarrow ME = \frac{1}{2} AB = 4$$

$$MF \parallel DC \xrightarrow{\Delta DAC} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2} \rightarrow MF = \frac{1}{2} DC = 6$$

$$EF = MF - ME = 6 - 4 = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$\left. \begin{matrix} \hat{E}_1 = \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{matrix} \right\} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{x+5}{x+1} = \frac{x+3}{x}$$

$$\rightarrow x(x+5) = (x+1)(x+3) \rightarrow \cancel{x} + 5x = \cancel{x} + 4x + 3 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$\rightarrow \text{نسبت تشابه } k = \frac{x+3}{x} = 2 \rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = k^2 = 4 \rightarrow S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta ADE} \quad (1)$$

$$\rightarrow \frac{S_{EDCB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}} \stackrel{(1)}{=} \frac{4S_{\Delta ADE} - S_{\Delta ADE}}{4S_{\Delta ADE}} = \frac{3}{4}$$

چون $\hat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع است، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه خواهیم داشت:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow 144 = xy (*)$$

$$\Delta ABH \text{ قضیه فیثاغورس در } x^2 + 144 = 400 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow \boxed{x = 16}$$

$$144 = xy \xrightarrow{x=16} \boxed{y = 9}$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow z^2 = y(x+y) = xy + y^2$$

$$= 144 + 81 = 225 \Rightarrow \boxed{z = 15} \Rightarrow x + y + z = 16 + 9 + 15 = 40$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\left. \begin{matrix} x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ 4 - \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \leq 4 \Rightarrow x+1 \leq 16 \Rightarrow x \leq 15 \end{matrix} \right\} \text{اشتراک} \rightarrow -1 \leq x \leq 15$$

این بازه شامل ۱۷ عدد صحیح است.

برای حل باید محدوده عبارت‌های داخل جزء صحیح را تعیین نماییم. $\sqrt{2}$ حدوداً ۱٫۴ را می‌باشد، پس:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$-2 < \sqrt{2} - 3 < -1$$

$$0 < 3\sqrt{2} - 4 < 1$$

$$-3 < 2\sqrt{2} - 5 < -2$$

$$3a = [\sqrt{2} - 3] + [3\sqrt{2} - 4] + [2\sqrt{2} - 5] = -2 + 0 + (-3)$$

$$3a = -5 \rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{3}}$$

$$[2a - 1] = \left[-\frac{10}{3} - 1\right] = [-\frac{13}{3}] = -5$$

شرط معکوس‌پذیری، یک به یک بودن تابع f می‌باشد. پس معادله‌ی زیر قابل تشکیل است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$m^2 + 2m = 4 - m \rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

قابل قبول $m = 1 \rightarrow f = \{(3, 2), (4, 4), (2, -2)\}$

قابل قبول $m = -4 \rightarrow \{(8, 2), (-1, 4), (2, -2)\}$

حال هر دو مقدر را در تابع جایگذاری می‌نمائیم تا مقادیر قابل قبول را مشخص نمائیم:

قدم اول تبدیل تابع به فرم مربع کامل می‌باشد ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \rightarrow y = (x-1)^2 + 1 \rightarrow x \leq 1 \xrightarrow{\text{وارون}} x = (y-1)^2 + 1 \quad y \leq 1$$

$$\rightarrow x-1 = (y-1)^2 \rightarrow |y-1| = \sqrt{x-1}$$

$$-y+1 = \sqrt{x-1} \rightarrow y = 1 - \sqrt{x-1} = f^{-1}(x)$$

حال باتوجه به شرط $y \leq 1$ عبارت درون قدر مطلق عبارتی منفی می‌باشد:



limoonad
Education For All

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴



limoonad
Education For All