



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۵۴۰۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی ۲ یازدهم تجربی

تاریخ آزمون: ۱۴۰۰/۰۳/۰۳



دبیرستان نورا

۱) به ازای کدام مقادیر  $m$ ، معادله‌ی درجه‌ی دوم  $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

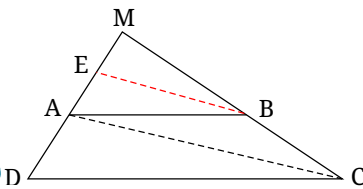
- ۱)  $m < -6$
- ۲)  $m > 3$
- ۳)  $0 < m < 3$
- ۴)  $3 < m < 6$

۲) به ازای کدام  $k$  مجموعه جواب معادله‌ی زیر برابر  $A = \{-2\}$  می‌باشد؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{38}{k} = \frac{3x}{x+1}$$

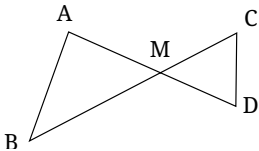
- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

۳) در دوزنقه‌ی  $ABCD$ ، پاره خط  $BE$  موازی قطر  $AC$  است. اگر  $AD = 7$  و  $AE = 3$  باشد، فاصله‌ی  $MD$  کدام است؟



- ۱) ۱۲
- ۲) ۱۲٫۲۵
- ۳) ۱۲٫۵
- ۴) ۱۲٫۷۵

۴) در شکل مقابل  $AB \parallel CD$  و  $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{5}$  می‌باشد. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟



- ۱)  $\frac{2}{3}$
- ۲)  $\frac{2}{5}$
- ۳)  $\frac{4}{9}$
- ۴)  $\frac{9}{25}$

۵) کدام گزینه غلط است؟

- ۱) نمودار هر تابع به شکل خط راست (غیرافقی) یک‌به‌یک است.
- ۲) نمودار هر تابع به شکل سهمی یک‌به‌یک نیست.
- ۳) تابع پله‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.
- ۴) تابع چند ضابطه‌ای می‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۶) اگر  $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$  و  $g = \{(2, 3), (5, 1)\}$ ، مجموعه‌ی  $f + 2g$  کدام است؟

- ۱)  $\{(2, 11)\}$
- ۲)  $\{(2, 7)\}$
- ۳)  $\{(1, 4), (2, 7)\}$
- ۴)  $\{(1, 4), (2, 11)\}$

۷) اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  و  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$  باشد  $D_{f \times g}$  کدام است؟

- ۱)  $[-2, -1] \cup [1, 2]$
- ۲)  $\mathbb{R} - [-2, +2]$
- ۳)  $\mathbb{R} - [-1, +1]$
- ۴)  $\emptyset$



۸ اگر  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  باشد مقدار  $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$  کدام است؟

- ۱ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۱)

۹ حداکثر مقدار تابع  $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$  در چه طول‌هایی رخ می‌دهد؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- $2k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۴)       $k\pi - \frac{\pi}{3}$  (۳)       $2k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۲)       $k\pi - \frac{\pi}{6}$  (۱)

۱۰ نمودار  $y = \log_{0.25}^{(x+1)}$  به کدام صورت است؟



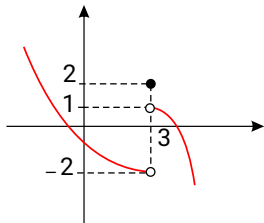
۱۱ حاصل  $\log_{\frac{1}{4}}^{\sqrt{2}} + \log_{\sqrt{2}}^{\frac{1}{4}}$  چقدر است؟

- $\frac{7}{4}$  (۴)       $\frac{19}{24}$  (۳)       $\frac{7}{12}$  (۲)       $\frac{11}{12}$  (۱)

۱۲ از معادله‌ی لگاریتمی  $\log_p^{(2x^r+1)} - \log_p^{(x+r)} = 1$  مقدار لگاریتم  $(2x-1)$  در پایه‌ی ۸، کدام است؟

- $\frac{2}{3}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $-\frac{2}{3}$  (۱)

۱۳ شکل مقابل نمودار تابع  $f$  است حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$  کدام است؟



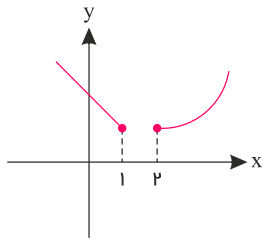
- صفر (۴)      ۲ (۳)      ۱ (۲)      -۱ (۱)

۱۴ تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  در کدام نقطه حد ندارد؟

- در همه‌ی نقاط حد دارد. (۴)       $x = -1$  (۳)       $x = 0$  (۲)       $x = 1$  (۱)

۱۵ در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = (x+a)[x]$  اگر  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  باشد، عدد حقیقی  $a$  کدام است؟

- ۰ (۴)      -۱ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (۱)



۱۶) نمودار تابع  $f$  به شکل مقابل است. این تابع در چه بازه‌هایی پیوسته است؟

- ①  $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$       ②  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$       ③  $\mathbb{R}$       ④  $[1, +\infty)$

۱۷) خانواده‌ای دارای چهار فرزند است می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

- ①  $\frac{3}{16}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③  $\frac{5}{16}$       ④  $\frac{3}{8}$

۱۸) احتمال قبولی فرد  $A$  در یک آزمون  $0.84$  و احتمال قبولی فرد  $B$  در همان آزمون  $0.75$  است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

- ①  $0.92$       ②  $0.94$       ③  $0.96$       ④  $0.98$

۱۹) داده‌های زیر تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز قبل از مسابقه دو است. اختلاف میانه و میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱۰۰, ۹۱, ۸۲, ۷۵, ۱۰۷, ۹۸, ۹۸, ۱۰۱, ۸۹, ۹۲, ۹۷, ۸۶

- ① صفر      ②  $1.5$       ③  $2$       ④  $2.5$

۲۰) در ۶۰ داده‌ی آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار  $1.2$  محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟

- ①  $0.1$       ②  $0.2$       ③  $0.3$       ④  $0.4$





## پاسخنامه تشریحی

شرط آنکه یک معادله درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که  $\Delta > 0$ ،  $S < 0$  و  $P > 0$  باشد.  1  2  3  4  5

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \frac{3m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب  $3 < m < 6$  می‌رسیم.

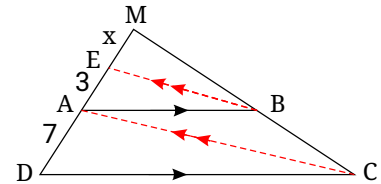
برای محاسبه کفایت  $x = -2$  را در معادله جایگذاری نماییم:  1  2  3  4  5

$$\frac{1}{-2-1} + \frac{38}{k} = \frac{-6}{-1} \rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{38}{k} = 6$$

$$\xrightarrow{\times 3k} -k + 114 = 18k \rightarrow 19k = 114 \rightarrow k = 6$$

کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:  1  2  3  4  5

$$\begin{cases} \triangle MAC : BE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ \triangle MD C : AB \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$



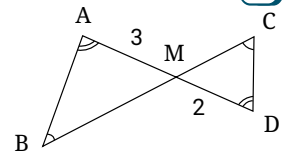
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow 7x = 3x+9 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = 2,25$$

در نتیجه:  $MD = 2,25 + 3 + 7 = 12,25$   1  2  3  4  5

تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



تابع پله‌ای یک‌به‌یک نیست، چون دارای تعدادی خط افقی است.  1  2  3  4  5

1  2  3  4  5

تمام عملیات جبری، روی مولفه‌ی دوم انجام می‌شود.

$$f = \{(1,3)(2,5)\} \Rightarrow f + 2g = \{(2,11)\}$$

$$2g = \{(2,6)(5,2)\}$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow |x| \geq 2 \rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

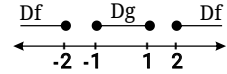
$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

1  2  3  4  5

پس باید ابتدا دامنه‌ی f و g را تعیین نماییم



$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \emptyset$$



- 1 2 3 4 8

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

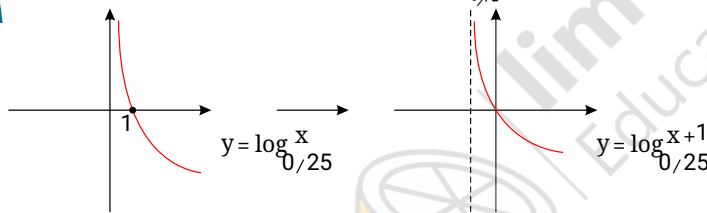
تک تک جملات را بر  $\cos \alpha$  تقسیم می‌کنیم

دقت کنید که عدد  $-1$  در ضابطه تابع فقط تابع را  $1$  واحد پایین می‌آورد. بنابراین طول نقطهٔ ماکسیمم را تغییر نخواهد داد. ضمناً می‌دانیم تابع  $\cos x$  در  $x = 2k\pi$  حداکثر می‌شود.

باید  $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$  باشد، پس:

$$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

از انتقال نمودار  $y = \log_{0,25}^x$  به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ محور  $x$ ، نمودار  $y = \log_{0,25}^{x+1}$  حاصل می‌شود.



- 1 2 3 4 11

می‌دانیم:  $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} + \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} + \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$$

- 1 2 3 4 12

می‌دانیم:  $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$ ,  $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$ ,  $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x^2+1}} - \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x+2}} = 1 \rightarrow \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{\frac{x^2+1}{x+2}}} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف}} \frac{x^2+1}{x+2} = 3^1$$

$$\rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

هر دو جواب بدست آمده، قابل قبول هستند ولی برای محاسبه‌ی  $\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x-1}}$  فقط به جای  $x$ ، می‌توانیم مقدار  $x = \frac{5}{2}$  را جایگزین کنیم، زیرا  $x = -1$  جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

$$\log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{x-1}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{\frac{5}{2}-1}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{\frac{3}{2}}} = \log_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e}^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}$$

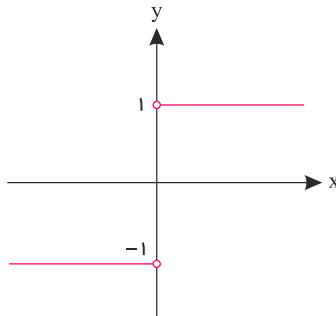


۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2$$

جمع این سه مقدار برابر یک می شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴ راهنمایی: می توانید این تابع را به شکل تابعی دو ضابطه ای بنویسید و آن را رسم کنید.



اول: دقت کنید که  $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  پس نمودار  $f$  به شکل روبه راست است.

دوم: معلوم است این تابع در همه نقاط جز  $x = 0$  حد دارد. در این نقطه حد چپ و راست برابر نیستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3$$

$$\Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) = 3 \Rightarrow 4 + 2a - 2 - a = 3 \Rightarrow a = 1$$

دقت کنید که در  $x = 1$  برای پیوستگی، پیوستگی چپ کفایت و همچنین برای پیوستگی در نقطه  $x = 2$ ، پیوستگی راست کفایت.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$S_{\text{جدید}} = \{PPPD, PPDP, PPDD, PPPP\} \Rightarrow n(S) = 4, A = \{PPDD\} \Rightarrow n(A) = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

پس  $P(A) = \frac{1}{4}$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$P(\underbrace{A \cup B}_{\text{لااقل یکی}}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$A, B$  مستقل هستند.

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,84 + 0,75 - \underbrace{(0,84)(0,75)}_{0,63} = 0,96$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹ برای پیدا کردن میانه، داده ها را به شکل صعودی مرتب می کنیم:

۷۵, ۸۲, ۸۶, ۸۹, ۹۱, ۹۲, ۹۷, ۹۸, ۹۸, ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۷

$$\Rightarrow \text{میانه} = \frac{92 + 97}{2} = 94,5$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \frac{1116}{12} = 93$$

تفاضل میانگین از میانه  $94,5 - 93 = 1,5$  است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 9} = \frac{1,2}{3 + 9} = \frac{1,2}{12} = \frac{1}{10}$$

به داده ها ۹ واحد اضافه کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند ولی به میانگین ۹ واحد اضافه می شود.

## پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴



limoonad  
Education For All