



۱

۱ اگر اشتراک دو بازه $(x^2 + 2, 8)$ و $(3, 2x + 1)$ تهی باشد، آنگاه x کدام است؟

۱.۵

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن (حداکثر یک رادیکال) بنویسید.

الف) $\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}$ ب) $\sqrt{\sqrt{256}}$ ج) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2048}}$

۱

۳ $\sin \theta + \cos \alpha$ همواره عددی در بازه $[a, b]$ است. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار عددی $3a - 5b$.

۱.۵

۴ در دنباله‌ی $1, 15, 18, 21, \dots$ چندمین جمله منفی، چندمین جمله دنباله است؟

۲

۵ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد بطوریکه $n(u) = 120$ ، $n(A) = 75$ ، $n(B) = 50$ ، $n(A \cap B) = 35$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$
پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

۱

۶ اگر $A_n = \left[\frac{-3}{n}, \frac{n-1}{2} \right)$ باشد، آنگاه حاصل $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ را بدست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه‌ی بدست آمده را معین کنید.

۱.۵

۷ حاصل عبارت $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$ را بیابید؟

۲

۸ در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند. چند نفر:

- الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟
ب) فقط ساعت در دست دارند؟
پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟
ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟

۱

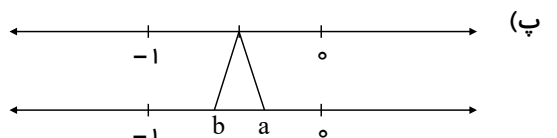
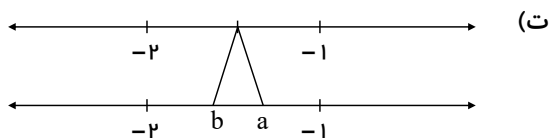
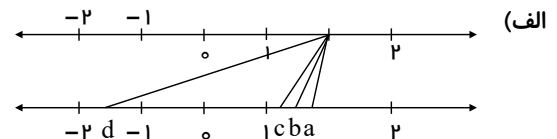
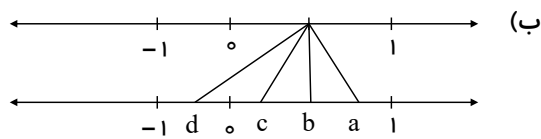
۹ اگر $a^2 - 6a = -1$ باشد حاصل عبارت $\frac{a+1}{\sqrt{a}}$ را بدست آورید.

۱

۱۰ اگر داشته باشیم $\sqrt[4]{x^3 \sqrt{x}} = y^{\frac{1}{3}}$ ، چه رابطه‌ی بین x و y برقرار است؟

۱

۱۱ در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از اعداد a و b و c و d مربوط به کدام ریشه است.



۱



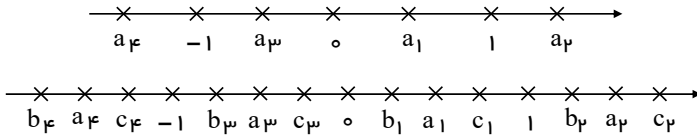
۱۲ در هر یک از حالات زیر a چه عددی می‌تواند باشد؟ برای هر یک مثالی بزنید.

۱

الف) $\sqrt[3]{a} > a$ ($a > 0$) پ) $\sqrt[3]{a} = a$ ($a \geq 0$) ث) $\sqrt[3]{a} < a$ ($a > 0$)
 ب) $\sqrt[3]{a} > a$ ($a < 0$) ت) $\sqrt[3]{a} = a$ ($a < 0$) ج) $\sqrt[3]{a} < a$ ($a < 0$)

۱۳ هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است وصل کنید.

۱



۱۴ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

۱.۵

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = |\cot \alpha|$$

۱

۱۵ شهاب سنگی به صورت مایل در حال سقوط به سطح زمین است که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد و در ارتفاع 40 متری سطح زمین قرار دارد. تا زمانی که این شهاب سنگ با زمین برخورد کند، چند متر در راستای افق به سمت جلو حرکت کرده است؟

۱

۱۶ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر 10 داریم که در آن کسینوس یک زاویه‌ی حاده $8/10$ است. مساحت مثلث را بدست آورید.

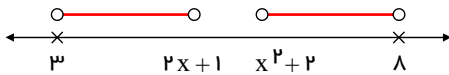
۲



limoonad.com
Education For All

پاسخنامه تشریحی

۱ باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست داشته باشد.



بنابراین:

$$\begin{aligned} x^2 + 2 > 2x + 1 &\Rightarrow x^2 - 2x + 2 - 1 > 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 &\Rightarrow (x - 1)^2 > 0 \\ 2x + 1 > 3 &\Rightarrow x > 1 \\ 8 > x^2 + 2 &\Rightarrow x^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \end{aligned}$$

۲

$$\sqrt[n]{m\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = mn\sqrt{a}$$

الف) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4}$

ب) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4}$

ج) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^6 \cdot 4^8}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{11}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{11}{3}}} = \left(2^{\frac{11}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

 راه دوم: تمام فرجه ها را در هم ضرب کرده و به صورت یک رادیکال می نویسیم: $\sqrt[n]{m\sqrt{a}} = mn\sqrt{a}$

الف) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4}$

ب) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2]{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt[2]{2^2} = \sqrt[2]{4}$

ج) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2^6 \cdot 4^8}} = \sqrt[4]{2^{\frac{11}{3}}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

۳

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-2 \leq \sin \theta + \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b = -6 - 10 = -16$$

۴

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

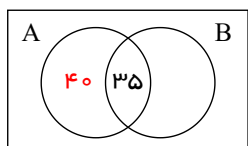
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

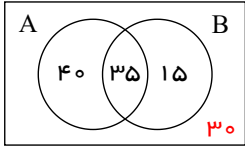
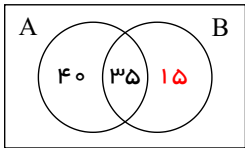
 قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: a_1

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 21 \\ d &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d = 21 + (n - 1) \times -3 = 21 - 3n + 3 = 24 - 3n \\ a_n &< 0 &\Rightarrow 24 - 3n < 0 &\Rightarrow 24 < 3n \xrightarrow{\div 3} 8 < n \end{aligned}$$

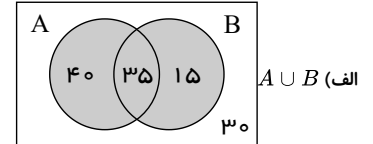
 $n > 8 \Rightarrow n \geq 9$ از جمله هشتم به بعد دنباله منفی می شود، یعنی اولین جمله منفی دنباله نهمین جمله آن است.

۵ باتوجه به نمودار ون داریم:

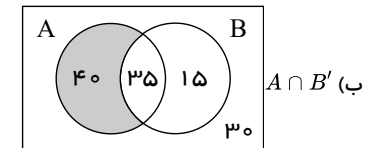

 -۱- از آنجا که $n(A) = 75$ است و $n(A \cap B) = 35$ نتیجه می گیریم که A ، ۴۰ عضو دارد که در $(A \cap B)$ نیست.

۲- با استدلال مشابه برای B داریم:

 ۳- از $n(u) = 120$ و $40 + 35 + 15 = 90$ نتیجه می‌گیریم ۳۰ عضو مجموعه‌ی مرجع در هیچ یک از مجموعه‌های A و B یا اکثرشان نیستند.

با توجه به نمودار ون:



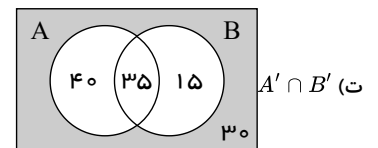
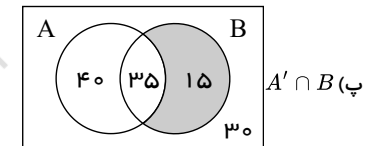
الف) $n(A \cup B) = 90$



ب) $n(A \cap B') = 40$

پ) $n(A' \cap B) = 15$

ت) $n(A' \cap B') = 30$


 ۶- با توجه به معلومات سوال ابتدا A_1 , A_2 , A_3 را تشکیل می‌دهیم:

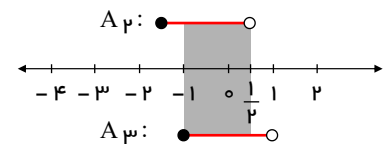
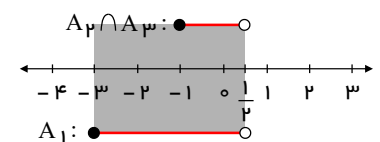
$$A_1 = \left[\frac{-3}{1}, \frac{1-1}{2} \right) = [-3, 0)$$

$$A_2 = \left[\frac{-3}{2}, \frac{2-1}{2} \right) = \left[\frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = \left[\frac{-3}{3}, \frac{3-1}{2} \right) = [-1, 1)$$

$$A_2 \cap A_3 = \left[-1, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \left[-3, \frac{1}{2} \right)$$

 حال $A_2 \cap A_3$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:

 و اجتماع آن را با A_1 رسم می‌کنیم:

 اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از: $0, -1, -2, -3$
 \Leftarrow در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

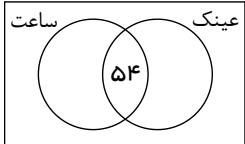
۷

زوج n	$\sqrt[n]{a^n} = a $
فرد n	$\sqrt[n]{a^n} = a$

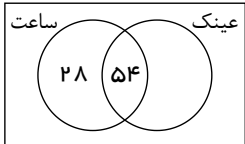
$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5} = \\ & (\sqrt{3}-2) - |\sqrt{3}-2| - (\sqrt{3}-2) \\ & = -|\sqrt{3}-2| \stackrel{\sqrt{3}-2 < 0}{=} -(-(\sqrt{3}-2)) = \sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

۸

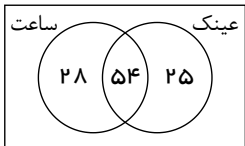
باتوجه به نمودار ون:



۸۲ نفر ساعت دارند که ۵۴ نفرشان عینک هم می‌زنند و ۲۸ = ۸۲ - ۵۴ نفر فقط ساعت دارند.

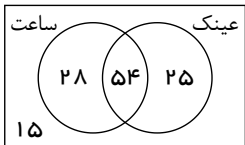
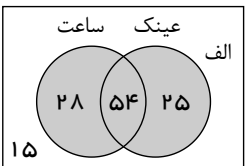


۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفرشان ساعت هم دارند و ۲۵ = ۷۹ - ۵۴ نفر فقط عینک می‌زنند.

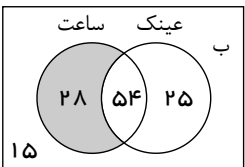


$$28 + 54 + 25 = 107$$

مجموع کسانی که ساعت، عینک یا هر دو را دارند ۱۰۷ نفر است که از ۱۲۲ نفر ۱۵ نفر باقی می‌مانند که نه ساعت دارند نه عینک می‌زنند.

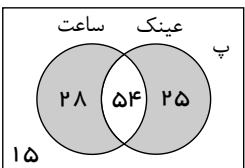

 الف) $25 + 28 + 54 = 107$ حداقل یکی یعنی یا ساعت یا عینک یا هر دو


ب) ۲۸

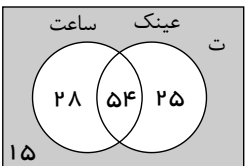


$$28 + 25 = 53 \text{ (پ)}$$

دقیقاً یکی از دو مورد یعنی یا ساعت یا عینک فقط یک کدام (نه هر دو)



ت) ۱۵ نفر



۹

$$a^x - 6a = -1 \Rightarrow a^x + 1 = 6a \Rightarrow \frac{a^x + 1}{a} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{a^x}{a} + \frac{1}{a} = 6 \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 6$$

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a} + \sqrt{a}}{a} = \frac{a\sqrt{a}}{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} a + \frac{a}{a^2} + \frac{2\sqrt{a}\sqrt{a}}{a} = a + \frac{1}{a} + \frac{2a}{a} = a + \frac{1}{a} + 2$$



$$a + \frac{1}{a} = 6 \rightarrow \frac{a+1}{\sqrt{a}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

۱۰

ابتدا عبارت دارای x را ساده می‌کنیم:
از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x}} &= \sqrt[4]{x^3 \times x^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt[4]{x^{\frac{6}{2} + \frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{2}}} = \sqrt[4]{(x^{\frac{13}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[8]{x^{13}} = x^{\frac{13}{8}} \\ x^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} &\xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}} (x^{\frac{1}{6}})^3 = (y^{\frac{1}{3}})^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow \sqrt{x} = y \end{aligned}$$

۱۱ الف) $a:3 \quad b:4 \quad c:5 \quad d:4$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند. و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

ب) $a:5 \quad b:4 \quad c:3 \quad d:4$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود. و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

پ) $a:3 \quad b:5$

اعداد بین صفر و منفی یک، هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند. و در اعداد منفی هر چه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

ت) $a:5 \quad b:3$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند. با توجه به اینکه هر چه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

۱۲ الف) $0 > a > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{8}} > \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

ب) $a < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} > -27 \rightarrow -3 > -27$

پ) $a = 0, 1 \Rightarrow \sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{0} = 0$

ت) $a = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1$

ث) $a > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{27} < 27 \Rightarrow 3 < 27$

ج) $-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} < \frac{-1}{8} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{-1}{8}$

۱۳ $a_1: a_1$ عددی است بین صفر و یک

ریشه‌ی سوم a_1 باید بزرگتر از خودش و کوچک‌تر از ۱ باشد. در نتیجه ریشه‌ی سوم a_1 ، a_1 خواهد بود. (اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگ‌تری برسند کوچک‌تر می‌شوند).
مثال:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^1 &= \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} &> \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

$a_p: a_p$ عددی بزرگ‌تر از یک است.

ریشه‌ی سوم a_4 ، باشد بزرگ‌تر از یک و کوچک‌تر از a_3 باشد یعنی b_4 .

a_4 : هرچه یک عدد بین صفر و منفی یک به توان فرد بزرگ‌تری برسد، عدد منفی نزدیک‌تری به صفر به وجود می‌آورد (عددی بزرگ‌تر)

پس ریشه سوم عددی بین صفر و منفی یک، باید از خودش کوچک‌تر باشد (از صفر دورتر باشد) (می‌دانیم هرچه در اعداد منفی روی محور به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچک‌تر می‌شود به‌عنوان مثال: $-3 < -2$)

در نتیجه ریشه‌ی سوم a_4 ، b_4 می‌شود که از خودش کوچک‌تر است.

a_4 : عددی منفی و کوچک‌تر از منفی یک است پس ریشه‌ی سومش از خودش بزرگ‌تر می‌شود.

(می‌دانیم که در محور اعداد منفی هرچه به سمت صفر پیش برویم عددمان بزرگ‌تر می‌شود.)

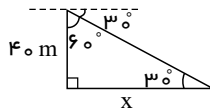
فلذا ریشه‌ی سوم a_4 ، c_4 می‌شود که از خودش بزرگ‌تر است.

۱۴

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}\right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\cot^2 \alpha} = |\cot \alpha|$$

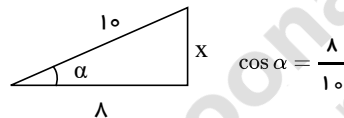
۱۵ با توجه به شکل داریم:



$$\tan 30^\circ = \frac{40}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{120 \cdot \sqrt{3}}{3} = 40 \sqrt{3}$$

۱۶

باتوجه به شکل مقابل داریم:



$$\cos \alpha = \frac{8}{10}$$

برای بدست آوردن ارتفاع مثلث، از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$100 = 64 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

